Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK3004

VIDEREGÅENDE MATEMATISK ANALYSE

ADVANCED MATHEMATICS

Faglig kontakt under eksamen: Snorre Lindset, Tlf.: 9 13 95

Eksamensdato: Fredag 14. desember 2012
Eksamenssted: Dragvoll
Eksamenstid: 5 timer
Studiepoeng: 15
Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

Sensur: 14. januar 2013

Eksamensoppgaven består av 5 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares.

Antall sider bokmål: 3
Antall sider nynorsk: 3
Antall sider engelsk: 3

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (15%)

Løs følgende integraler:

a)

$$\int (x + \frac{1}{x})dx$$

b)

$$\int \frac{\ln x}{x^{3/2}}dx$$

c)

$$\int \frac{6x^2 \ln(x^3+2)}{x^3+2}dx$$

Oppgave 2 (20%)

Betrakt en økonomi hvor vi har to tidspunkt, i dag ($t = 0$) og i morgen ($t = 1$). På tidspunkt $t = 1$ vil økonomien havne i en av to tilstander (s), høykonjunktur ($s = h$) eller lavkonjunktur ($s = l$). Det finnes to finansielle aktiva i økonomien som vi kan investere i, aktivum A og aktivum B. Prisen på aktivaene på tidspunkt $t = 0$ kan sammenfattes i følgende prisvektor:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} P_A & P_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Prisene på tidspunkt $t = 1$ kan sammenfattes i følgende prismatrise (toppskriftene ($s = l, h$) indikerer om økonomien er i høy- eller lavkonjunktur):

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_A^l & P_B^l \\ P_A^h & P_B^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Antall *enheter* av de to aktivaene vi har kjøpt kan sammenfattes i vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Hva er verdien av porteføljen vår på tidspunkt $t = 0$?

b) Hva er verdien av porteføljen vår på tidspunkt $t = 1$?

c) Hvordan kan vi sette opp en portefølje som har verdi lik 2 på tidspunkt $t = 1$ uansett hvilken tilstand økonomien havner i?

d) Hva er verdien av porteføljen i spørsmål c) på tidspunkt $t = 0$? Hva kan du si om den risikofrie renten i økonomien?

Oppgave 3 (25%)

Gitt funksjonen

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Betrakt optimeringsproblemet

$$\max f(x_1, x_2)$$

under bibetingelsene

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2$$
$$x_2 \leq 0.$$

a) Illustrer bibetingelsene grafisk i samme figur.

b) Finn maksimumsverdien til $f(x_1, x_2)$ med de tilhørende optimale verdiene for x_1 og x_2.

c) Anta nå at det kun er én bibetingelse,

$$x_1^2 + x_2^2 = b, \quad b \in \mathbb{R}_{++}.$$

Finn optimal x_1 og x_2 og tilhørende verdi for Lagrangemultiplikatoren.

d) Bruk resultatene fra spørsmål c) til å finne et uttrykk for den optimale verdifunksjonen for det tilhørende optimeringsproblemet.

e) Bruk den optimale verdifunksjonen til å gjenfinne Lagrangemultiplikatoren fra spørsmål c).

Oppgave 4 (20%)

I denne oppgaven blir funksjonen $y = g(x)$ beskrevet med geometriske egenskaper til grafen til funksjonen. For hvert av spørsmålene skal du skrive ned en differensiallikning $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ som har funksjonen g som løsning (eller som en av løsningene).

a) Helningen til grafen til g i punktet (x, y) er lik summen av x og y.

b) Linjen som tangerer grafen til g i punktet (x, y) skjærer x-aksen i punktet $(\frac{x}{2}, 0)$.

c) Enhver rett linje som står normalt (ortogonalt) på grafen til g går gjennom punktet $(0,1)$.
Hint: Alle rette linjer som står normalt på linjen med stigningstall a, $a \neq 0$, har stigningstall $-\frac{1}{a}$.

d) Linjen som tangerer grafen til g i punktet (x, y) går gjennom punktet $(-y, x)$.

Oppgave 5 (20%)

Endringer i populasjonen P av rotter på en øde øy kan beskrives med differensiallikningen

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}06P - 0{,}0004P^2.$$

a) Tegn et retningsdiagram for $\frac{dP}{dt}$ (la $P \in [0,300]$ og $t \in [0,100]$).

b) Hvor stor vil populasjonen bli når $t \to \infty$?

c) Hvordan endrer populasjonen seg når

1. $P(t) = 250$?
2. $P(t) = 150$?
3. $P(t) = 50$?

d) Endringer i populasjonen av rotter på naboøyen kan beskrives med den samme differensiallikningen. Du får oppgitt at $P(0) = 0$. Hva kan du nå si om populasjonen når $t \to \infty$? Gi en kort forklaring på svaret ditt.

Ta dei føresetnadane du måtte finne nødvendig. %-satsane bak oppgåvenummereringa er berre meint som ein *indikasjon* på korleis dei ulike oppgåvene kjem til å bli vekta ved sensuren.

Oppgåve 1 (15%)
Løs fylgjande integral:

a)

$$\int (x + \frac{1}{x}) dx$$

b)

$$\int \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx$$

c)

$$\int \frac{6x^2 \ln(x^3 + 2)}{x^3 + 2} dx$$

Oppgåve 2 (20%)

Betrakt ein økonomi kor vi har to tidspunkt, i dag ($t = 0$) og i morgon ($t = 1$). På tidspunkt $t = 1$ vil økonomien komme i ein av to tilstandar (s), høgkonjunktur ($s = h$) eller lågkonjunktur ($s = l$). Det fins to finansielle aktiva i økonomien som vi kan investere i, aktivum A og aktivum B. Prisen på aktivane på tidspunkt $t = 0$ kan samanfattast i fylgjande prisvektor:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} P_A & P_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Prisene på tidspunkt $t = 1$ kan samanfattast i fylgjande prismatrise (toppskriftene ($s = l, h$) indikerer om økonomien er i høg- eller lågkonjunktur):

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_A^l & P_B^l \\ P_A^h & P_B^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Antall *einingar* av dei to aktivane vi har kjøpt kan samanfattast i vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Kva er verdien av porteføljen vår på tidspunkt $t = 0$?

b) Kva er verdien av porteføljen vår på tidspunkt $t = 1$?

c) Korleis kan vi sette opp ein portefølje som har verdi lik 2 på tidspunkt $t = 1$ uansett korleis tilstand økonomien kjem i?

d) Kva er verdien av porteføljen i spørsmål c) på tidspunkt $t = 0$? Kva kan du sei om den risikofrie renta i økonomien?

Oppgåve 3 (25%)

Gitt funksjonen

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Betrakt optimeringsproblemet

$$\max f(x_1, x_2)$$

under bibetingelsane

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

a) Illustrer bibetingelsane grafisk i samme figur.

b) Finn maksimumsverdien til $f(x_1, x_2)$ med dei tilhørande optimale verdiane for x_1 og x_2.

c) Anta nå at det berre er éin bibetingelse,

$$x_1^2 + x_2^2 = b, \quad b \in \mathbb{R}_{++}.$$

Finn optimal x_1 og x_2 og tilhørande verdi for Lagrangemultiplikatoren.

d) Bruk resultata frå spørsmål c) til å finne eit uttrykk for den optimale verdifunksjonen for det tilhørande optimeringsproblemet.

e) Bruk den optimale verdifunksjonen til å finne att Lagrangemultiplikatoren frå spørsmål c).

Oppgåve 4 (20%)

I denne oppgåva blir funksjonen $y = g(x)$ beskrive med geometriske eigenskapar til grafen til funksjonen. For kvart av spørsmåla skal du skrive ned ei differensiallikning $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ som har funksjonen g som løysning (eller som ei av løysningane).

a) Helinga til grafen til g i punktet (x, y) er lik summen av x og y.

b) Linja som tangerer grafen til g i punktet (x, y) skjærer x-aksen i punktet $(\frac{x}{2}, 0)$.

c) Ei kvar rett linje som står normalt (ortogonalt) på grafen til g går gjennom punktet $(0,1)$.

Hint: Alle rette linjer som står normalt på linja med stigningstall a, $a \neq 0$, har stigningstall $-\frac{1}{a}$.

d) Linja som tangerer grafen til g i punktet (x, y) går gjennom punktet $(-y, x)$.

Oppgåve 5 (20%)

Endringar i populasjonen P av rotter på ei aude øy kan beskrivast med differensiallikninga

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}06P - 0{,}0004P^2.$$

a) Tekne eit retningsdiagram for $\frac{dP}{dt}$ (la $P \in [0,300]$ og $t \in [0,100]$).

b) Kor stor vil populasjonen bli når $t \to \infty$?

c) Korleis endrar populasjonen seg når

1. $P(t) = 250$?
2. $P(t) = 150$?
3. $P(t) = 50$?

d) Endringar i populasjonen av rotter på naboøya kan beskrivast med den same differensiallikninga. Du får oppgitt at $P(0) = 0$. Kva kan du no seie om populasjonen når $t \to \infty$? Gi ei kort forklaring på svaret ditt.

Make the assumptions you find necessary. %-points associated with each problem give an *indication* of how the problem will count on the final grading.

Problem 1 (15%)

Solve the following integrals:

a)

$$\int (x+\frac{1}{x})dx$$

b)

$$\int \frac{\ln x}{x^{3/2}}dx$$

c)

$$\int \frac{6x^2 \ln(x^3+2)}{x^3+2}dx$$

Problem 2 (20%)

Consider an economy with two points in time, today ($t=0$) and tomorrow ($t=1$). At time $t=1$ the economy will be in one of the states (s) good ($s=h$) or bad ($s=l$). We have access to two financial assets, asset A and asset B. The asset prices at time $t=0$ are given in the following price vector:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} P_A & P_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

The asset prices at time $t=1$ are given in the following price matrix (superscripts ($s=l,h$) show the state of the economy, i.e., good or bad):

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_A^l & P_B^l \\ P_A^h & P_B^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

The number of *units* we have bought of the two assets is given by the vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) What is the value of the portfolio at time $t=0$?

b) What is the value of the portfolio at time $t=1$?

c) How can we construct a portfolio that has value 2 at time $t=1$, no matter what state the economy is in?

d) What is the time $t = 0$ value of the portfolio in question c)? What can you say about the risk-free interest rate in the economy?

Problem 3 (25%)

We are given the function

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Consider the optimization problem

$$\max f(x_1, x_2)$$

subject to

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2$$
$$x_2 \leq 0.$$

a) Give a graphic illustration of the constraints.

b) Find the maximum value of $f(x_1, x_2)$ with the corresponding optimal values for x_1 og x_2.

c) Suppose now that there is only one constraint,

$$x_1^2 + x_2^2 = b, \quad b \in \mathbb{R}_{++}.$$

Find the optimal x_1 og x_2 and the corresponding value for the Lagrange multiplier.

d) Use the results from question c) to find an expression for the optimal value function for the corresponding optimization problem.

e) Use the optimal value function to re-discover the Lagrange multiplier from question c).

Problem 4 (20%)

Here the function $y = g(x)$ is described by geometric properties of its graph. For each of the problems, write a differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ having the function g as its solution (or as one of its solutions).

a) The slope of the graph of g at the point (x, y) is the sum of x and y.

b) The line tangent to the graph of g at the point (x, y) intersects the x-axis at the point $(\frac{x}{2}, 2)$.

c) Every straight line orthogonal to the graph of g passes through the point $(0,1)$. *Hint:* All straight lines orthogonal to the line with slope a, $a \neq 0$, has slope $-\frac{1}{a}$.

d) The line tangent to the graph of g at (x, y) passes through the point $(-y, x)$.

Problem 5 (20%)

Changes in the population P of rats on a desert island can be described by the differential equation

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}06P - 0{,}0004P^2.$$

a) Draw a direction diagram for $\frac{dP}{dt}$ (let $P \in [0,300]$ and $t \in [0,100]$).

b) What is the population when $t \to \infty$?

c) How does the population change when

1. $P(t) = 250$?
2. $P(t) = 150$?
3. $P(t) = 50$?

d) Changes in the population of rats on the neighboring island can be described with the same differential equation. You are told that $P(0) = 0$. What can you say about the population when $t \to \infty$? Give a brief explanation of your answer.