Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (V2013)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (20%) Løs integralene

a)

$$\int (3x^2 + 2e^{2x})dx$$

b)

$$\int xe^x dx$$

c)

$$\int (2x+8)e^{(x+4)^2} dx$$

d)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Oppgave 2 (20%) La

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 9 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

a) Finn den generelle løsningen på (det homogene) likningssettet

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

når $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

b) Finn den generelle løsningen på det inhomogene likningssettet

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

når

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

c) Velg en partikulærløsning for den generelle løsningen fra spørsmål b) og verifiser at den faktisk er en løsning.

Oppgave 3 (35%) En nasjon har et beløp $C > 0$ tilgjengelig for investeringer. Det er n ulike prosjekter som trenger finansiering. Nasjonen kan velge å investere beløpet x_j, $j = 1, \ldots, n$, i prosjekt j. Nasjonen ønsker å maksimere forventet avkastning fra sine investeringer. Forventet avkastning er gitt som

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j x_j - \frac{1}{2}\beta_j x_j^2), \qquad \alpha, \beta > 0.$$

a) Formuler nasjonens optimeringsproblem og skriv ned den tilhørende Lagrangefunksjonen.

La

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\beta_j}$$

og

$$K = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j}.$$

b) Anta at deler av beløpet C blir ubrukt (hele beløpet C vil ikke bli investert i de n prosjektene). Vis at da må $C > H$.

c) Anta at $\alpha_j > \frac{H-C}{K}$ for alle $j = 1, \ldots, n$. Vis at da vil alle prosjektene få (noe) finansiering.

Oppgave 4 (25%) En aktør har nyttefunksjon $u(w)$, hvor $w > 0$ er formue. Nyttefunksjonen er slik at $u'(w) > 0$ og $u''(w) < 0$. Den *relative risikoavversjonskoeffisienten* (RRA) er definert slik

$$RRA = -\frac{u''(w)}{u'(w)} w. \tag{1}$$

Anta at $RRA = k$, hvor k er en positiv konstant. Finn en nyttefunksjon $u(w)$ som gjør at RRA i (1) er konstant.