NTNU
Det skapende universitet

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i SØK3004 – Videregående matematisk analyse

Faglig kontakt under eksamen: Snorre Lindset

Tlf.: 73 59 13 95

Eksamensdato:	16. desember 2013
Eksamenstid (fra-til):	5 timer (09.00 – 14.00)
Sensurdato:	16. januar 2014

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C /Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x, HP 30S eller SR-270X College

Målform/språk:	Bokmål og engelsk
Antall sider:	7 (inkl. forside)
Antall sider vedlegg:	0

Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (H2013)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (20%) Løs følgende integraler:

a)

$$\int \ln(x^2) 3t^2 dt$$

b)

$$\int \frac{x^2 + x^3}{\sqrt{x}} dx$$

c)

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dx dy$$

d) Gi en geometrisk fortolkning av integralet i spørsmål c).

Oppgave 2 (20%)

a) Løs likningssettet

$$\begin{aligned} -3x_1 - 6x_2 + 6x_4 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 &= -8 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -13 \end{aligned}$$

b) Bestem rangen til matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

c) La $\mathbf{A}$ være en kvadratisk matrise. Finn $\mathbf{A}^{-1}$ når $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{I}$, hvor $\mathbf{I}$ er identitetsmatrisen og $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

d) La $\mathbf{A}$ være en 2×2-matrise. Du får oppgitt at $\text{tr}(\mathbf{A}) = 3$ og $|A| = 2$. Bestem de to egenverdiene (λ_1 og λ_2) til matrisen $\mathbf{A}$.

Oppgave 3 (20%) En konsument har to goder tilgjengelig for konsum. Antall enheter konsumert kan sammenfattes i konsumvektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Prisen (i kroner) for hvert av de to godene er

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Tiden (målt i timer) det tar å konsumere hvert av de to godene er

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Konsumenten har totalt kroner 350 tilgjengelig for konsum og han har 80 timer tilgjengelig. Konsumentens nytte av konsum er gitt ved

$$U(\mathbf{x}) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

a) Formuler konsumentens optimeringsproblem.

b) Sett opp Karush-Kuhn-Tucker-betingelsene for $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)'$.

c) Finn den optimale konsumvektoren $\mathbf{x}^*$ (du trenger ikke å vise at Lagrangefunksjonen er konkav).

Oppgave 4 (20%) Et gruveselskap har en rett til å utvinne et edelmetall. Utvinningsretten utløper om ett år. Profittraten av utvinningen på tid t, $0 \leq t \leq 1$, er

$$G(t) = e^{2rt^2},$$

hvor r er en konstant som er lik diskonteringsrenten (kontinuerlig rente uttrykt på årsbasis).

a) Forklar <u>kort</u> hvorfor dagens verdi (nåverdien) av utvinningsretten kan skrives slik:

$$\pi = \int_0^1 e^{-rt+2rt^2} dt.$$

La $F(t) = e^{-rt+2rt^2}$ være den diskonterte profittraten.

b) Finn en andreordens Taylor-approksimasjon av $F(t)$ rundt punktet $\frac{1}{2}$.

c) Bruk Taylor-approksimasjonen fra spørsmål b) til å finne en tilnærmet verdi for utvinningsretten når $r = 0{,}1$. (I følge Maple er det eksakte svaret $\pi = 1{,}017349119$.)

Oppgave 5 (20%)

a) Vis at $x = Ct - C^2$ er en løsning for differensiallikningen $\dot{x}^2 = t\dot{x} - x$ for alle verdier av konstanten C. Vis at dette ikke er en generell løsning siden også $x = \frac{1}{4}t^2$ er en løsning.

b) Funksjonen $x = x(t)$ tilfredsstiller $x(0) = 0$ og differensiallikningen $\dot{x} = (1 + x^2)t$ for alle t i et åpent interval I rundt 0. Bevis at

1. $t = 0$ er et globalt minimumspunkt for $x(t)$ i I
2. funksjonen x er konveks i I.

Hint: Du trenger ikke å løse differensiallikningen for å besvare oppgaven.

Exam in SØK 3004 Advanced Mathematics (H2013)

Make the assumptions you find necessary. %-points associated with each problem give an *indication* of how the problem will count on the final grading.

Problem 1 (20%) Solve the following integrals:

a)

$$\int \ln(x^2)3t^2 dt$$

b)

$$\int \frac{x^2 + x^3}{\sqrt{x}} dx$$

c)

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dx dy$$

d) Give a geometric interpretation of the integral in question c).

Problem 2 (20%)

a) Solve the set of equations

$$\begin{aligned} -3x_1 - 6x_2 + 6x_4 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 &= -8 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -13 \end{aligned}$$

b) Determine the rank of the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

c) Let $\mathbf{A}$ be a square matrix. Find $\mathbf{A}^{-1}$ when $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{I}$, where $\mathbf{I}$ is the identity matrix and $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

d) Let $\mathbf{A}$ be a 2×2-matrix. You are told that $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 3$ og $|A| = 2$. Find the two eigenvalues (λ_1 og λ_2) of the matrix $\mathbf{A}$.

Problem 3 (20%) A consumer can consume two goods. The number of units of the two goods he consumes is given in the consumption vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

The prices (in kroner) for each of the two goods are

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

The time (in hours) it takes to consume one unit of each good is given by

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

The consumer has a total of 350 kroner and 80 hours available for consumption. The consumer's utility of consumption is given by

$$U(\mathbf{x}) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

a) Write down the consumer's optimization problem.

b) State the Karush-Kuhn-Tucker-conditions for $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)'$.

c) Find the optimal consumption vector $\mathbf{x}^*$ (you do not have to show that the Lagrange function is concave).

Problem 4 (20%) A mining company has the right to extract a noble metal. This right expires in one year. The time t, $0 \le t \le 1$, profit rate from extraction is

$$G(t) = e^{2rt^2},$$

where r is a constant equal to the discount rate (annualized continuous compounding).

a) Give a *short* explanation for why the present value of the extraction right can be written as follows:

$$\pi = \int_0^1 e^{-rt+2rt^2}\,dt.$$

Let $F(t) = e^{-rt+2rt^2}$ be the discounted profit rate.

b) Find a second-order Taylor approximation of $F(t)$ about the point $\frac{1}{2}$.

c) Use the Taylor approximation from question b) to find an approximate value of the extraction right when $r = 0{,}1$. (According to Maple, the exact answer is $\pi = 1{,}017349119$.)

Problem 5 (20%)

a) Show that $x = Ct - C^2$ is a solution to the differential equation $\dot{x}^2 = t\dot{x} - x$ for all values of the constant C. Then show that it is not the general solution because $x = \frac{1}{4}t^2$ is also a solution.

b) The function $x = x(t)$ satisfies $x(0) = 0$ and the differential equation $\dot{x} = (1 + x^2)t$ for all t in an open interval I around 0. Prove that

1. $t = 0$ is a global minimum point for $x(t)$ in I
2. the function x is convex on I.

Hint: You do not have to solve the equation to answer the question.