Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (V2014)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (15%) Beregn:

a)

$$\int x \ln(x^2) dx$$

b)

$$\int \frac{2\ln(x)}{x} dx$$

c)

$$\frac{d}{dt} \int_{t^2}^{t^3} e^{\frac{1}{2}x} dx$$

Oppgave 2 (35%) Betrakt følgende system av differensiallikninger:

$$\dot{x} = 2y, \qquad \dot{y} = 3x - y$$

a) Finn systemets likevektspunkt.

b) Tegn nullisoklinene (*null clines*) inn i xy-planet. Du får nå fire unike regioner i xy-planet som er separert av nullisoklinene. Tegn også inn piler som viser i hvilken retning integralkurver i hver av de fire regionene beveger seg.

c) La $f(x, y) = 2y$ og $g(x, y) = 3x - y$. Beregn Jacobimatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_1'(x,y) & f_2'(x,y) \\ g_1'(x,y) & g_2'(x,y) \end{bmatrix}.$$

d) Beregn determinanten til $\mathbf{A}$. Hva kan du si om likevekten du fant i spørsmål a)?

e) Vis at det karakteristiske polynomet til $\mathbf{A}$ er

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6.$$

f) Finn egenverdiene til $\mathbf{A}$. Finn den tilhørende egenvektoren til den negative egenverdien.

g) Det viser seg at det er to baner som konvergerer til likevektspunktet. Disse to banene danner en rett linje. Denne linjen er parallel med egenvektoren tilhørende den negative egenverdien. Tegn denne linjen inn i figuren i spørsmål b).

Oppgave 3 (30%) Løs optimeringsproblemet

$$\text{maks}(\frac{1}{2}x - y) \qquad \text{når} \qquad x + e^{-x} = y.$$

Oppgave 4 (20%) La $\mathbf{P}$ og $\mathbf{Q}$ være $n \times n$-matriser hvor $\mathbf{PQ} - \mathbf{QP} = \mathbf{P}$. Vis at da er

$$\mathbf{P}^2\mathbf{Q} - \mathbf{QP}^2 = 2\mathbf{P}^2.$$