Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK2005
FINANSMARKEDER

Faglig kontakt under eksamen: Egil Matsen

Tlf.: 9 78 52

Eksamensdato: Torsdag 10. juni 2010

Eksamenssted: Dragvoll

Eksamenstid: 4 timer

Studiepoeng: 7,5

Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

Sensur: 1. juli 2010.

Eksamensoppgaven består av 3 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares.
Ved sensuren teller oppgave 1 50%, oppgave 2 teller 30% og oppgave 3 teller 20%.

Antall sider bokmål: 2
Antall sider nynorsk: 2
Antall sider engelsk: 2

Merk! Studentene må primært gjøre seg kjent med sensur på stud.web eller ved å oppsøke sensuroppslagene. Evt telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.

Oppgave 1: (50%)
Vi betrakter en portefølje bestående av to aktiva, A og B. Variansen til avkastningen for denne porteføljen kan skrives

$$\sigma_P^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB},$$

der w_A og w_B er andelene investert i henholdsvis aktivum A og B, σ_A og σ_B er standard-avviket til avkastningen for de to aktivaene, og σ_{AB} er kovariansen mellom avkastningen til de to aktivaene.

a) Anta at korrelasjonen mellom avkastningen til de to aktivaene er $\rho_{AB} = -1$. Vis at variansen til porteføljeavkastningen i dette tilfellet kan skrives

$$\sigma_P^2 = (w_A\sigma_A - (1 - w_A)\sigma_B)^2.$$

b) Hva er minste porteføljevarians du kan oppnå med korrelasjon som i a)? Hvilken andel investert i aktivum A gir denne minimum porteføljevariansen i tilfellet der $\sigma_A = 0{,}2$ og $\sigma_B = 0{,}1$?

c) Vis at den porteføljeandelen investert i aktivum A som minimerer variansen til porteføljeavkastningen generelt kan skrives (Du skal altså ikke lenger anta at $\rho_{AB} = -1$):

$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}}.$$

d) Hva kan du si om standardavviket til avkastningen til de to aktivaene, σ_A og σ_B, dersom du finner det optimalt å investere like mye i de to aktivaene for å minimere porteføljevariansen? (Hint: Sett $w_A = \frac{1}{2}$). Forklar hvorfor.

I det videre skal du la $E[r_A]$ og $E[r_B]$ være forventet avkastning på henholdsvis aktivum A og B. Din nyttefunksjon er på formen $U = E[r_P] - \frac{1}{2}X\sigma_P^2$, der $E[r_P]$ er forventet portefølje-avkastning og X er din risikoaversjonskoeffisient.

e) Anta nå at $E[r_B] = r_f$ og $\sigma_B = 0$. Vi betrakter nå altså aktivum B som et risikofritt alternativ med sikker avkastning lik den risikofrie renta. Finn et uttrykk for optimal andel investert i A. Forklar uttrykket du finner. Hvor stor er denne andelen i tilfellet der $E[r_A] = 12\%$, $\sigma_A = 20\%$, $r_f = 3\%$ og $X = 3$?

f) Vi gjeninnfører nå usikkerhet i avkastningen til aktivum B. Dvs. $E[r_B] \neq r_f$ og $\sigma_B \neq 0$. Finn et uttrykk for optimal andel investert i A. Forklar uttrykket du finner. Hvor stor er denne andelen i tilfellet der $E[r_A] = 12\%$, $\sigma_A = 20\%$, $E[r_B] = 9\%$, $\sigma_B = 10\%$, $\rho_{AB} = 0{,}25$ og $X = 3$? Hva vil du si om din tilpasning i dette tilfellet?

Oppgave 2: (30%)
Du observerer følgende priser på nullkupongobligasjoner med ulik løpetid som gir 100 kroner ved forfall:

Løpetid (i år)	Pris i dag (i kroner)
1	98,14

2	95,93
3	92,86

a) Finn yielden på nullkupongobligasjonene ("spotrenta") per år for hver løpetid.
b) Finn dagens terminrente ("forwardrente") for hver periode.
c) Gitt svarene dine i b), hva kan du si om forventet fremtidig rentenivå sett fra tidspunkt 0?
d) Forklar hvorfor prisen på en nullkupongobligasjon med 4-års løpetid, som betaler 100 kroner ved forfall, ikke kan være $93{,}85$ kroner. Hva er høyeste rimelige pris på en slik 4-årig nullkupongobligasjon?

Oppgave 3: (20%)
Betrakt aksjen til selskapet NewEnergy AS som antas å følge en binomial modell. Vi ser på to tidspunkt; 0 og T. Aksjekurs i dag er $S_0 = 100$, og de to mulighetene på tidspunkt T er $S_T = 160$ eller $S_T = 80$. Aksjen betaler ikke dividende mellom tidspunkt 0 og T, og risikofri rente mellom de to tidspunktene er 2%.

a) Illustrer aksjens kursutvikling i et binomisk tre. Vis deretter payoff for en kjøpsopsjon med utøvelsespris $X = 110$ i de to mulige tilstandene på tidspunkt T. Hva er sikringsbrøken for opsjonen?
b) Hva er prisen på kjøpsopsjonen på tidspunkt 0.
c) En salgsopsjon på aksjen til selskapet NewEnergy AS med utøvelsespris $X = 110$, selges for $P_0 = 22{,}32$ på tidspunkt 0. Er salgsopsjonen korrekt priset?

Oppgåve 1: (50%)
Vi ser på ei portefølje som inneheld to aktivum, A og B. Variansen til avkastninga for denne portefølja kan skrivast

$$\sigma_P^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB},$$

der w_A og w_B er andelane investert i hhv. aktivum A og B, σ_A og σ_B er standardavviket til avkastninga for våre to aktiva, og σ_{AB} er kovariansen mellom avkastninga til aktiva A og B.

a) Anta at korrelasjonen mellom avkastninga til dei to aktivuma er $\rho_{AB} = -1$. Vis at variansen til porteføljeavkastninga i dette tilfellet kan skrivast

$$\sigma_P^2 = (w_A\sigma_A - (1 - w_A)\sigma_B)^2.$$

b) Kva er minste porteføljevarians du kan oppnå med korrelasjon som i a)? Kva andel investert i aktivum A gjev denne minimum porteføljevariansen i tilfellet der $\sigma_A = 0{,}2$ og $\sigma_B = 0{,}1$?

c) Vis at den porteføljeandelen investert i aktivum A som minimerar variansen til porteføljeavkastninga generelt kan skrivast (Du skal altså ikkje lenger anta at $\rho_{AB} = -1$):

$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}}.$$

d) Kva kan du seie om standardavviket til avkastninga til dei to aktivuma, σ_A og σ_B, dersom du finn det optimalt å investere like mykje i dei to aktivuma for å minimere porteføljevariansen? (Hint: Sett $w_A = \frac{1}{2}$). Forklar kvifor.

I det vidare skal du la $E[r_A]$ og $E[r_B]$ vere forventa avkastning på hhv. aktivum A og B. Din nyttefunksjon er på forma $U = E[r_P] - \frac{1}{2} X \sigma_P^2$, der $E[r_P]$ er forventa porteføljeavkastning og X er din risikoaversjonskoeffisient.

e) Anta no at $E[r_B] = r_f$ og $\sigma_B = 0$. Vi betraktar no altså aktivum B som eit risikofritt alternativ med sikker avkastning lik den risikofrie renta. Finn eit uttrykk for optimal andel investert i A. Forklar uttrykket du finn. Kor stor er denne andelen i tilfellet der $E[r_A] = 12\%$, $\sigma_A = 20\%$, $r_f = 3\%$ og $X = 3$?

f) Vi innfører no på nytt uvisse i avkastninga til aktivum B. Dvs. $E[r_B] \neq r_f$ og $\sigma_B \neq 0$. Finn eit uttrykk for optimal andel investert i A. Forklar uttrykket du finn. Kor stor er denne andelen i tilfellet der $E[r_A] = 12\%$, $\sigma_A = 20\%$, $E[r_B] = 9\%$, $\sigma_B = 10\%$, $\rho_{AB} = 0{,}25$ og $X = 3$? Kva vil du seie om di tilpassing i dette tilfellet?

Oppgåve 2: (30%)

Du observerar følgjande prisar på nullkupongobligasjonar med ulik løpetid som gjev 100 kroner ved forfall:

Løpetid (i år)	Pris i dag (i kroner)
1	98,14
2	95,93
3	92,86

a) Finn yielden på nullkupongobligasjonane ("spotrenta") per år for kvar løpetid.
b) Finn dagens terminrente ("forwardrente") for kvar periode.
c) Gitt svara dine i b), kva kan du seie om forventa framtidig rentenivå sett frå tidspunkt 0?
d) Forklar kvifor prisen på ein nullkupongobligasjon med 4-års løpetid, som betalar 100 kroner ved forfall, ikkje kan vere $93{,}85$ kroner. Hva er høgaste rimelege pris på ein slik 4-årig nullkupongobligasjon?

Oppgåve 3: (20%)

Betrakt aksjen til selskapet NewEnergy AS som antas å følgje ein binomial modell. Vi ser på to tidspunkt; 0 og T. Aksjekurs i dag er $S_0 = 100$, og dei to moglegheitene på tidspunkt T er $S_T = 160$ eller $S_T = 80$. Aksjen betalar ikkje dividende mellom tidspunkt 0 og T, og risikofri rente mellom dei to tidspunkta er 2%.

a) Illustrer aksjens kursutvikling i eit binomisk tre. Vis deretter payoff for ein kjøpsopsjon med utøvelsespris $X = 110$ i dei to moglege tilstandane på tidspunkt T. Kva er sikringsbrøken for opsjonen?
b) Kva er prisen på kjøpsopsjonen på tidspunkt 0.

c) Ein salgsopsjon på aksjen til selskapet NewEnergy AS med utøvelsespris $X = 110$, seljast for $P_0 = 22{,}32$ på tidspunkt 0. Er salgsopsjonen korrekt prisa?

Question 1: (50%)
Consider a portfolio consisting of two assets, A and B. The variance of the return on this portfolio can be expressed

$$\sigma_P^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_{AB},$$

where w_A and w_B are the shares invested in asset A and B, respectively, σ_A and σ_B are the standard deviation of return for each asset, and σ_{AB} is the covariance of the return on the two.

a) Assume that the correlation of return between the two assets is $\rho_{AB} = -1$. Show that the variance of return for the portfolio in this case can be written

$$\sigma_P^2 = (w_A\sigma_A - (1 - w_A)\sigma_B)^2.$$

b) What is the minimum variance of portfolio return you can achieve with the correlation given in a)? What will be the share invested in asset A in the case where $\sigma_A = 0.2$ and $\sigma_B = 0.1$?

c) Show that the share invested in asset A that minimizes the return variance of the portfolio in general can be expressed as (You are no longer to assume that $\rho_{AB} = -1$):

$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}}.$$

d) What can you say about the standard deviation of return for the two assets, σ_A and σ_B, if you find it optimal to invest an equal amount in the two assets in order to minimize the variance of portfolio return? (Hint: Let $w_A = \frac{1}{2}$). Explain why.

Proceeding, let $E[r_A]$ and $E[r_B]$ be the expected return for asset A and B, respectively. Your utility function is given by $U = E[r_P] - \frac{1}{2}X\sigma_P^2$, where $E[r_P]$ is the expected portfolio return, and X is your coefficient of risk aversion.

e) Assume for the moment that $E[r_B] = r_f$ and $\sigma_B = 0$. That is, asset B is a risk free asset with certain return given by the risk free interest rate. Find an expression for the optimal share of your portfolio invested in A. Explain your resulting expression. How large is this share in the case where $E[r_A] = 12\%$, $\sigma_A = 20\%$, $r_f = 3\%$ and $X = 3$?

f) We now reintroduce uncertainty in the return of asset B. That is $E[r_B] \neq r_f$ and $\sigma_B \neq 0$. Find an expression for the optimal share invested in asset A. Explain your

SØK2005 – Financial Markets

resulting expression. How large is this share in the case where $E[r_A] = 12\%$, $\sigma_A = 20\%$, $E[r_B] = 9\%$, $\sigma_B = 10\%$, $\rho_{AB} = 0.25$ and $X = 3$? What would you say about the way you adapt in this case?

Question 2: (30%)
You observe the following prices for zero-coupon bonds with differing time to maturity, who all pay 100 kroner at maturity:

Time to maturity (in years)	Price today (in kroner)
1	98.14
2	95.93
3	92.86

a) Find the annual yield on the zero-coupon bonds ("spot rate") for each maturity.
b) Find the forward rates for each period.
c) Given your answers in b), what can you say about the future expected interest rate level, as seen from period 0.
d) Explain why the price of a zero-coupon bond with four years to maturity, which pays 100 kroner at maturity, cannot be 93.85 kroner. What is the highest reasonable price for such a four-year zero-coupon bond?

Question 3: (20%)
The stock of the company NewEnergy Inc. is assumed to follow a binomial model. We are looking at two points in time; 0 and T. Today's stock price is $S_0 = 100$, and the two possibilities at time T is $S_T = 160$ or $S_T = 80$. The stock does not pay dividend between 0 and T, and the risk free rate is 2% over the period.

a) Illustrate the movements of the stock in a binomial tree. Also show the payoff of a call option with strike price $X = 110$ in the two possible states at time T. What is the hedge ratio for the option?
b) What is the price on the call option at time 0?
c) A put option on the stock of NewEnergy Inc. with strike price $X = 110$, is sold for $P_0 = 22.32$ at time 0. Is the put option priced correctly?