Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK3004
VIDEREGÅENDE MATEMATISK ANALYSE

Faglig kontakt under eksamen: Arnt Ove Hopland
Tlf.: 9 19 35

Eksamensdato:	Torsdag 9. desember 2010
Eksamenssted:	Dragvoll
Eksamenstid:	5 timer
Studiepoeng:	15
Tillatte hjelpemidler:	Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin. Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.
Sensur:	10. januar 2011

Oppgaveteksten er skrevet på bokmål og nynorsk.

Eksamensoppgaven består av 5 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting av oppgavene er gitt i parantes.

Oppgave 1 (20 %)

a) Beregn følgende integraler

$(i)\ \int \frac{5x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}\,dx$

$(ii)\ \int_a^b \left(3x^4 + 3xe^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

b) Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen $t\dot{x} = (1+t)x$. Finn også løsningskurven gjennom punktet $(t, x) = (1, e)$.

c) Gitt matrisene

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ k & 3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 4 \\ c & 2 & a \end{pmatrix}$, der k, a, b og c er vilkårlige konstanter.

Merk! Det blir sendt automatisk varsel om sensur på e-post. Du kan se hva som er registrert ved å gå inn på Studentweb. Evt andre telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.

(i) Beregn matriseproduktet AB
(ii) For hvilke verdier av k har A en invers? Finn den inverse.

Oppgave 2 (15 %)

Følgende system av likninger definerer u og v som funksjoner av x og y rundt punktet P: $(x, y, u, v) = (1, 1, -1, 0)$:

$$u + xe^{y} + v = e - 1$$
$$x + e^{u+v^2} - y = e^{-1}$$

a) Totaldifferensier systemet.
b) Finn verdiene til de partielle deriverte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ og $\frac{\partial v}{\partial y}$ i punktet P.

Oppgave 3 (20 %)

Betrakt systemet av differensiallikninger

$$\dot{x} = y + x^2 - a$$
$$\dot{y} = cxy$$

der a og c er strengt positive konstanter $(a, c > 0)$.

a) Finn x-isoklinen(e) og y-isoklinen(e) (også kjent som nullkliner). Finn systemets likevekt(er).

b) Lag faseplandiagram og vis med piler hvordan systemet beveger seg utenfor likevekt. Synes likevekten(e) å være stabil(e)?

Oppgave 4 (15 %)

Løs de følgende optimeringsproblemene:

a) $\max \int_0^T \left(1 - ty(t) - [u(t)]^2\right) dt, \quad \dot{y}(t) = u(t),\ y(0) = y_0,\ y(T)$ fri

b) $\min \int_0^1 \left(y(t) + [u(t)]^2\right) dt, \quad \dot{y}(t) = -u(t),\ y(0) = 0,\ y(1)$ fri

Oppgave 5 (30 %)

En bedrift produserer en vare ved hjelp av to innsatsfaktorer, v_1 og v_2. Prisen på faktorene er hhv. q_1 og q_2. Kvantum av varen er x og produktfunksjonen er gitt ved

$x = (v_1^{-\rho} + v_2^{-\rho})^{-\frac{\beta}{\rho}}$ der β og ρ er parametere ($\beta > 0$, $\rho > -1$ og $\rho \neq 0$)

Finn bedriftens kostnadsfunksjon og vis Shephards Lemma.

NYNORSK

Eksamensoppgåva består av 5 oppgåver med delspørsmål som alle skal besvarast. Vekting av oppgåvene er gjeve i parantes.

Oppgave 1 (20 %)

a) Bereikn følgjande integral

$$(i)\ \int \frac{5x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}\,dx$$

$$(ii)\ \int_a^b \left(3x^4 + 3xe^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$$

b) Finn den allmenne løysinga av differensiallikninga $t\dot{x} = (1+t)x$. Finn også løysingskurva gjennom punktet $(t, x) = (1, e)$.

c) Gjeve matrisene

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ k & 3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 4 \\ c & 2 & a \end{pmatrix}$, der k, a, b og c er vilkårlege konstantar.

(i) Bereikn matriseproduktet AB
(ii) For kva verdiar av k har A ein invers? Finn den inverse.

Oppgave 2 (15 %)

Følgjande system av likningar definerar u og v som funksjonar av x og y rundt punktet P: $(x, y, u, v) = (1, 1, -1, 0)$:

$$u + xe^{y} + v = e - 1$$
$$x + e^{u+v^2} - y = e^{-1}$$

a) Totaldifferensier systemet.

b) Finn verdiane til dei partielle deriverte $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ og $\frac{\partial v}{\partial y}$ i punktet *P*.

Oppgave 3 (20 %)

Betrakt systemet av differensiallikningar

$$\dot{x} = y + x^2 - a$$
$$\dot{y} = cxy$$

der a og c er strengt positive konstantar $(a, c > 0)$.

a) Finn *x*-isoklinen/isoklinane og *y*-isoklinen/isoklinane (også kjent som nullklinar). Finn systemets jamvekt(er).

b) Lag faseplandiagram og vis med piler korleis systemet røyrer seg utanfor jamvekt. Verkar jamvekta(ne) å vere stabil(e)?

Oppgave 4 (15 %)

Løys dei følgjande optimeringsproblema:

a) $\max \int_0^T \left(1 - ty(t) - \left[u(t)\right]^2\right) dt, \quad \dot{y}(t) = u(t),\ y(0) = y_0, y(T)$ fri

b) $\min \int_0^1 \left(y(t) + \left[u(t)\right]^2\right) dt, \quad \dot{y}(t) = -u(t),\ y(0) = 0,\ y(1)$ fri

Oppgave 5 (30 %)

Ei bedrift produserar ei vare ved hjelp av to innsatsfaktorar, v_1 og v_2. Prisen på faktorane er hhv. q_1 og q_2. Kvantum av vara er *x* og produktfunksjonen er gjeve ved

$x = (v_1^{-\rho} + v_2^{-\rho})^{-\frac{\beta}{\rho}}$ der β og ρ er parametrar ($\beta > 0$, $\rho > -1$ og $\rho \neq 0$)

Finn bedriftas kostnadsfunksjon og vis Shephards Lemma.

Merk! Det blir sendt automatisk varsel om sensur på e-post. Du kan se hva som er registrert ved å gå inn på Studentweb. Evt andre telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.