Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK1001
INNFØRING I MATEMATIKK FOR ØKONOMER

Faglig kontakt under eksamen: Hildegunn E. Stokke
Tlf.: 9 1665

Eksamensdato: Mandag 6. desember 2010
Eksamenssted: Dragvoll
Eksamenstid: 4 timer
Studiepoeng: 7,5
Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.
Sensur: 6. januar 2011

Oppgaveteksten er skrevet på bokmål og nynorsk.

Bokmål

Eksamensoppgaven består av 5 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting av oppgavene er gitt i parentes.

Oppgave 1 (20%)

a) La $f(x) = e^{2x}(x^2 - 1)$. Finn $f'(x)$.

b) La $f(x) = \left(\dfrac{3x+2}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{4}}$. Finn $f'(x)$.

c) La $f(x) = \ln(2-3x)$. Angi definisjonsmengden til funksjonen og finn $f'(x)$.

d) La $f(x) = 3x^4$. Finn elastisiteten av *f* med hensyn på *x*. Gi en kort tolkning av svaret.

e) La $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Angi definisjonsmengden til funksjonen og illustrer definisjonsmengden grafisk i et xy-diagram.

Oppgave 2 (20%)

a) Utfør følgende divisjoner:

i. $\left(4x^3 - 5x^2 + 8x - 1\right) : \left(x - 2\right)$

ii. $\left(5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5\right) : \left(x + 1\right)$

Merk! Det blir sendt automatisk varsel om sensur på e-post. Du kan se hva som er registrert ved å gå inn på Stud.web. Evt andre telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.

b) Produsert kvantum (Y) i en bedrift avhenger av bruken av kapital (K) og arbeidskraft (L), og er gitt ved følgende Cobb-Douglas produktfunksjon: $Y = F(K, L) = K^{0.4}L^{0.5}$. Finn de partielle deriverte med hensyn på K og L av 1. og 2. orden og gi en kort økonomisk tolkning av resultatene.

Oppgave 3 (15%)
Befolkningen i et land var 4 millioner i 2009, og det ble estimert at den ville vokse med 1.8% årlig.

a) Sett opp en funksjon, $P(t)$, som beskriver utviklingen i befolkningen over tid. La $t = 0$ tilsvare 2009.
b) Hvor lang tid tar det før befolkningen når 7 millioner?
c) Hvordan må funksjonen for befolkningsutvikling omformuleres dersom befolkningen:
   - vokser med 3% per år?
   - vokser med 0.7% per år?
   - avtar med 1.2% per år?

Oppgave 4 (20%)
Gitt følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{3}$$

a) Finn funksjonens stasjonære punkter og tilhørende funksjonsverdier.
b) Bruk 1.derivert-testen til å avgjøre hvorvidt de stasjonære punktene er lokale minimumspunkt, lokale maksimumspunkt, eller ingen av delene.
c) Vis at bruk av 2.derivert-testen gir samme resultat som i b).
d) Finn eventuelle vendepunkter for funksjonen, og forklar hva som karakteriserer funksjonen i disse punktene.

Oppgave 5 (25%)
a) Løs følgende optimeringsproblem ved bruk av Lagranges metode:

$$Max / Min \quad f(x, y) = -x^2 + 4x + 2y$$

gitt at $x + y = m$

der m er en konstant.

b) Sett $m = \frac{5}{2}$. Tegn nivåkurvene $f(x, y) = 2$ og $f(x, y) = 6$, samt kurven for bibetingelsen $x + y = \frac{5}{2}$ i samme diagram. Avgjør ved figurbetraktning om punktet $(x, y) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ er et maksimums- eller minimumspunkt.

c) I oppgave a) er den optimale verdien av $f(x, y)$ en funksjon av m, dvs $f^*(m)$. Finn $f^*(m)$, beregn $\frac{df^*(m)}{dm}$ og kommenter svaret.

Merk! Det blir sendt automatisk varsel om sensur på e-post. Du kan se hva som er registrert ved å gå inn på Stud.web. Evt andre telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.

Nynorsk

Eksamensoppgåva inneheld 5 oppgåver med delspørsmål som alle skal svarast på. Vekting av oppgåvene er gitt i parentes.

Oppgåve 1 (20%)

a) La $f(x) = e^{2x}(x^2 - 1)$. Finn $f'(x)$.

b) La $f(x) = \left(\dfrac{3x+2}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{4}}$. Finn $f'(x)$.

c) La $f(x) = \ln(2-3x)$. Angi definisjonsmengda til funksjonen og finn $f'(x)$.

d) La $f(x) = 3x^4$. Finn elastisiteten av *f* med omsyn til *x*. Gi ei kort tolking av svaret.

e) La $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Angi definisjonsmengda til funksjonen og illustrer definisjonsmengda grafisk i eit xy-diagram.

Oppgåve 2 (20%)

a) Utfør fylgjande divisjonar:

i. $\left(4x^3 - 5x^2 + 8x - 1\right) : \left(x - 2\right)$

ii. $\left(5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5\right) : \left(x + 1\right)$

b) Produsert kvantum (*Y*) i ei bedrift avheng av bruken av kapital (*K*) og arbeidskraft (*L*), og er gitt ved fylgjande Cobb-Douglas produktfunksjon: $Y = F(K, L) = K^{0.4}L^{0.5}$. Finn dei partielle deriverte med omsyn til *K* og *L* av 1. og 2. orden og gi ei kort økonomisk tolking av resultata.

Oppgåve 3 (15%)

Befolkninga i eit land var 4 millionar i 2009, og det blei estimert at den ville vokse med 1.8% årleg.

a) Set opp ein funksjon, $P(t)$, som beskriv utviklinga i befolkninga over tid. La $t = 0$ tilsvare 2009.
b) Kor lang tid tek det før befolkninga når 7 millionar?
c) Korleis må funksjonen for befolkningsutvikling omformulerast dersom befolkninga:
   - veks med 3% per år?
   - veks med 0.7% per år?
   - minkar med 1.2% per år?

Oppgåve 4 (20%)

Gitt fylgjande funksjon:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{3}$$

a) Finn funksjonen sine stasjonære punkt og tilhøyrande funksjonsverdiar.
b) Bruk 1.derivert-testen til å avgjere om dei stasjonære punkta er lokale minimumspunkt, lokale maksimumspunkt, eller ingen av delane.
c) Vis at bruk av 2.derivert-testen gir same resultat som i b).
d) Finn eventuelle vendepunkt for funksjonen, og forklar kva som karakteriserer funksjonen i desse punkta.

Oppgåve 5 (25%)

a) Løys fylgjande optimeringsproblem ved bruk av Lagrange sin metode:

$$Max / Min \quad f(x,y) = -x^2 + 4x + 2y$$

gitt at $x + y = m$

der *m* er ein konstant.

b) Set $m = \frac{5}{2}$. Teikn nivåkurvene $f(x,y) = 2$ og $f(x,y) = 6$, samt kurva for vilkåret $x + y = \frac{5}{2}$ i same diagram. Avgjer ved figurbetraktning om punktet $(x,y) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ er eit maksimums- eller minimumspunkt.

c) I oppgåve a) er den optimale verdien av $f(x,y)$ ein funksjon av *m*, dvs $f^*(m)$. Finn $f^*(m)$, berekn $\frac{df^*(m)}{dm}$ og kommenter svaret.