Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK3004
VIDEREGÅENDE MATEMATISK ANALYSE

Faglig kontakt under eksamen: Arnt Ove Hopland
Tlf.: 9 19 35

Eksamensdato: Fredag 20. mai 2011

Eksamenssted: Dragvoll

Eksamenstid: 5 timer

Studiepoeng: 15

Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

Sensur: 14. juni 2011

Antall sider bokmål: 2

Antall sider nynorsk: 2

Bokmål

Eksamensoppgaven består av 5 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting av oppgavene er gitt i parantes.

Oppgave 1 (20 %)

a) Beregn følgende integraler

$$(i)\ \int_1^2 \frac{ax^4 - x^3 + bx^2 + cx + k}{x^2 + x}\,dx$$

$$(ii)\ \int_0^1 \left(bxe^{-\frac{c}{2}x} + ax^k \right) dx$$

Der *a*, *b*, *c* og *k* er vilkårlige, strengt positive $(a, b, c, k > 0)$ konstanter.

b) Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen $\dot{x} + t^{-2}x = t^{-3}$. Finn også løsningskurven gjennom $(t, x) = (1, 0)$.

c) Gitt matrisene

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

der alle element er positive konstanter

(*i*) Finn matriseproduktet ***AB***.
(*ii*) Finn den inverse til hver av matrisene ***A*** og ***B***. Hva må man anta om verdien på elementene for at de inverse skal være definert?

Oppgave 2 (12 %)

Finn elastisiteten av *y* mhp *x* når *y* er en deriverbar funksjon som passer i likningen

$$Bxe^{\gamma x + \theta y} = (x+1)^c\, y^c$$

der B, γ, θ, og c er konstanter.

Merk! Det blir sendt automatisk varsel om sensur på e-post. Du kan se hva som er registrert ved å gå inn på Studentweb. Evt andre telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.

Oppgave 3 (18 %)

Betrakt systemet av differensiallikninger

$$\dot{x} = x^2 - y - k$$
$$\dot{y} = \theta x^{1+\alpha} y^{(\alpha\beta)^2}$$

der α, β, k og θ er strengt positive konstanter $\left(\alpha,\ \beta, k,\ \theta > 0\right)$.

a) Finn x-isoklinen(e) og y-isoklinen(e) (også kjent som nullkliner). Finn systemets likevekt(er).

b) Lag faseplandiagram og vis med piler hvordan systemet beveger seg utenfor likevekt.
Synes likevekten(e) å være stabil(e)?

Oppgave 4 (15 %)

Løs de følgende optimeringsproblemene:

a) $\max \int_0^1 \left(x(t) - \left[u(t)\right]^2 \right) dt, \quad \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 2,\ x(1)$ fri

b) $\max \int_0^T \left(y(t) - \left[u(t)\right]^2 \right) dt, \quad \dot{y} = y + u,\ y(0) = 0,\ y(T)$ fri

Oppgave 5 (35 %)

Betrakt en bedrift som er prisfast kvantumstilpasser i produkt- og faktormarkedene. Bedriften har en Cobb-Douglas produktfunksjon gitt ved

$$x = v_1^{\varepsilon_1} v_2^{\varepsilon_2} \text{ der } \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1.$$

Utled bedriftens profittfunksjon og vis at den er:

(*i*) Voksende i produktprisen og avtakende i faktorprisene (vis Hotellings Lemma).

(*ii*) Homogen av grad 1 i produkt- og faktorpriser.

(*iii*) Konveks i produkt- og faktorpriser.

Merk! Det blir sendt automatisk varsel om sensur på e-post. Du kan se hva som er registrert ved å gå inn på Studentweb. Evt andre telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.

Nynorsk

Eksamensoppgåva består av 5 oppgåver med delspørsmål som alle skal besvarast. Vekting av oppgåvene er gjeve i parantes.

<u>Oppgåve 1 (20 %)</u>

a) Bereikn følgjande integral

$$(i)\ \int_1^2 \frac{ax^4 - x^3 + bx^2 + cx + k}{x^2 + x}\,dx$$

$$(ii)\ \int_0^1 \left(bxe^{-\frac{c}{2}x} + ax^k \right) dx$$

Der a, b, c og k er vilkårlege, strengt positive $(a, b, c, k > 0)$ konstantar.

b) Finn den allmenne løysninga av differensiallikninga $\dot{x} + t^{-2}x = t^{-3}$. Finn også løysningskurva gjennom $(t, x) = (1, 0)$.

c) Gjeve matrisene

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

der alle element er positive konstantar

(i) Finn matriseproduktet $\boldsymbol{AB}$.
(ii) Finn den inverse til kvar av matrisene $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$. Kva må ein anta om verdien på elementa for at dei inverse skal vere definert?

<u>Oppgåve 2 (12 %)</u>

Finn elastisiteten av y mhp x når y er ein deriverbar funksjon som passar i likninga

$$Bxe^{\gamma x + \theta y} = (x+1)^c\, y^c$$

der B, γ, θ, og c er konstantar.

Oppgåve 3 (18 %)

Betrakt systemet av differensiallikningar

$$\dot{x} = x^2 - y - k$$
$$\dot{y} = \theta x^{1+\alpha} y^{(\alpha\beta)^2}$$

der α, β, k og θ er strengt positive konstantar $(\alpha,\ \beta, k,\ \theta > 0)$.

a) Finn *x*-isoklinen (evt. isoklinane) og *y*-isoklinen (evt. isoklinane) (også kjent som nullklinar). Finn systemets likevekt(er).

b) Lag faseplandiagram og vis med piler korleis systemet bevegar seg utanfor likevekt. Synes likevekta (likevektene) å vere stabil(e)?

Oppgåve 4 (15 %)

Løys dei følgjande optimeringsproblema:

a) $\max \int_0^1 \left(x(t) - [u(t)]^2 \right) dt, \quad \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 2, x(1)$ fri

b) $\max \int_0^T \left(y(t) - [u(t)]^2 \right) dt, \quad \dot{y} = y + u,\ y(0) = 0,\ y(T)$ fri

Oppgåve 5 (35 %)

Betrakt ei bedrift som er prisfast kvantumstilpassar i produkt- og faktormarknadane. Bedrifta har ein Cobb-Douglas produktfunksjon gjeve ved

$x = v_1^{\varepsilon_1} v_2^{\varepsilon_2}$ der $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$.

Utled bedriftas profittfunksjon og vis at den er:

(*i*) Veksande i produktprisen og avtakande i faktorprisane (vis Hotellings Lemma).

(*ii*) Homogen av grad 1 i produkt- og faktorprisar.

(*iii*) Konveks i produkt- og faktorprisar.