EKSAMEN SØK 3004 HØST 2021

OPPGAVE 1

a) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

b) $\int (x^2+1)^2 2x\, dx$

SETT $U = x^2 + 1$

$\frac{dU}{dx} = 2x \Rightarrow 2x\, dx = dU$

NÅ BLIR PROBLEMET:

$\int U^2 dU = \frac{1}{3}U^3 + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C$

c) BRUKER DELVIS INTEGRASJON.

DERIVERT AV e^{-x} ER $-e^{-x}$.

DERIVERT AV X ER 1.

VELGER DERFOR X SOM f

OG e^{-x} SOM g'. $g = -e^{-x}$.

$$\int x e^{-x}\,dx = \int f g'\,dx =$$

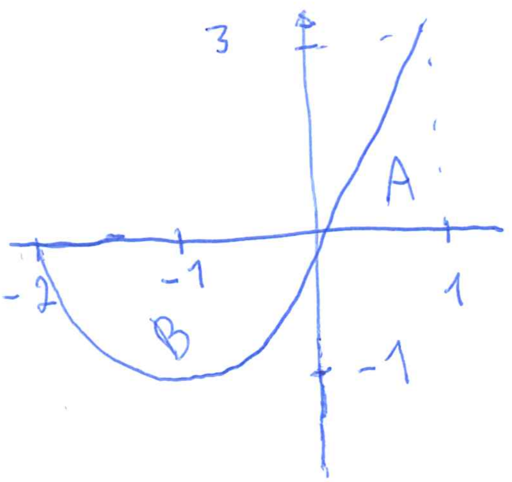
$$fg - \int f' g\,dx =$$

$$\underset{f}{x}\,\underset{g}{(-e^{-x})} - \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{(-e^{-x})}\,dx$$

$$= -xe^{-x} - (-1)\int e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} + (-e^{-x}) + C = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

d) Y-KURVEN SER OMLAG SLIK UT:



AREALET BESTÅR AV TO DELER, A OG B.

B ER UNDER X-AKSEN. MÅ DERFOR

HUSKE MINUS FORAN INTEGRALET.

$$B = -\int_{-2}^{0} \left[(x+1)^2 - 1\right] dx =$$

$$-\left[\frac{1}{3}(x+1)^3 - x\right]_{-2}^{0}$$

$$= -\frac{1}{3} - 0 - (-1)\left(-\frac{1}{3}\right) - (-1)(-1)(-2)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$A = \int_{0}^{1} \left[(x+1)^2 - 1\right] dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}(x+1)^3 - x\right]_{0}^{1} =$$

$$= \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

AREALET $(A+B) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

OPPGAVE 2

a) $A + B = \begin{bmatrix} 0+1 & 1-1 \\ 2+5 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 5 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 3\cdot 5 & 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{DET } A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$\text{DET } B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) = 7$$

b)
$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 6 - 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 & 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 5 & 1 \\ 25 & 10 & 0 \\ 35 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{DET } CD = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 1 \\ 25 & 10 & 0 \\ 35 & 11 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 14 \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 11 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 35 & 5 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 35 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= 14(5 \cdot 10) - 5(25 \cdot 5) + 1(25 \cdot 11 - 35 \cdot 10)$$

$$= 700 - 625 + 275 - 350 = 0$$

SIDEN DETERMINANTEN ER NULL, HAR IKKE CD FULL RANG, ALTSÅ IKKE 3. NESTE HOVEDMINOR ER

$\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. ALTSÅ ER RANGEN $= 2$.

c) $A X = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

i) $0 \cdot Y + 1 \cdot Z = 2 \Rightarrow Z = 2.$

ii) $2 \cdot Y + 3 \cdot Z = 8$

SETTER INN FOR Z I ii):

$2 \cdot Y + 3 \cdot 2 = 8 \Rightarrow 2Y = 8 - 6 = 2$

$\Rightarrow Y = 1.$

LØSNINGEN ER:

$Z = 2,\ Y = 1,\ X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

OPPGAVE 3

a) $\dot{x} + x = 6$

ER PÅ FORMEN $\dot{x} + ax = b$,

HVOR $a = 1$ OG $b = 6$.

MULTIPLISERER MED INTEGRERENDE FAKTOR $e^{at} = e^{t}$.

$$\underbrace{\dot{x}e^{t} + xe^{t}}_{\frac{d(xe^{t})}{dt}} = 6e^{t}$$

$$\Rightarrow \frac{d(xe^{t})}{dt} = 6e^{t} \Rightarrow xe^{t} = 6e^{t} + C$$

$$\Rightarrow \quad X = Ce^{-t} + 6$$

b) $\dot{X} = \dfrac{t}{X}$ ER EN SEPARABEL DIFFERENSIALLIGNING.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} \quad \Rightarrow \quad x\,dx = t\,dt$$

INTEGRERER PÅ BEGGE SIDER:

$$\int x\,dx = \int t\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{1}{2}t^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}t^2 + \underset{\substack{\parallel \\ C_2 - C_1}}{C_3}$$

$$\Rightarrow x^2 = t^2 + \underset{\overset{\shortparallel}{2 \cdot C_3}}{C}$$

FOR Å FINNE C BRUKES INITIAL BETINGELSEN:

$$x^2 = 1 = t^2 + C = 1 + C$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0.$$

LØSNINGEN BLIR $x^2 = t^2$

$\Rightarrow x = \pm t$. SIDEN HVERKEN x ELLER t KAN VÆRE NEGATIVE, BLIR LØSNINGEN $x = t$

c) $\ddot{X} + \dot{X} = 6$

SIDEN X IKKE INNGÅR,

ERSTATTES $\dot{X}$ MED U,

OG $\ddot{X}$ ERSTATTES MED $\dot{U}$.

LIGNINGEN BLIR NÅ:

$$\dot{U} + U = 6.$$

DETTE ER DEN SAMME SOM I

a), BARE MED ANNEN BOKSTAV.

13

FRA a) VET VI AT

$$v = Ce^{-t} + 6.$$

ALTSÅ ER $\dot{x} = Ce^{-t} + 6$

$$\Rightarrow \quad x = \int (Ce^{-t} + 6)\,dt$$

$$= -Ce^{-t} + 6t + B.$$

OPPGAVE 4

a) $f(X,Y) = X^2 - 2XY + 2Y^2 - 2Y$

STASJONÆRPUNKTET:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 2X - 2Y = 0 \quad i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = -2X + 4Y - 2 = 0 \quad ii)$$

FRA i) HAR VI AT $X = Y$.

SETTER INN FOR X I ii):

$$-2Y + 4Y - 2 = 0 \Rightarrow Y = 1.$$

STASJONÆRPUNKTET ER :

$$X^* = 1 \; , \; Y^* = 1.$$

FOR Å FINNE HVA SLAGS PUNKT DETTE ER, MÅ VI FINNE HESSE-MATRISEN :

$$\frac{\partial f}{\partial X} = f_x = 2X - 2Y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = f_{XX} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} = f_{XY} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = -2$$ [DET VISSTE VI FORDI $f_{xy} = f_{yx}$]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 4$$

HESSEMATRISEN $= \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

HOVEDMINORENE ER:

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-2)(-2)$$
$$= 8 - 4 = 4$$

BEGGE HOVEDMINORENE ER POSITIVE.
ALTSÅ HAR VI ET MINIMUMSPUNKT.

b) $\max_{x,y} \; 3 - x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y$

GITT

$$x \leq 2$$
$$y \leq 2$$

LAGRANGE UTTRYKKET ER:

$$L = 3 - x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y$$
$$- \lambda_1 (x-2) - \lambda_2 (y-2)$$

1. ORDENSBETINGELSENE:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = -2X + 2Y - \lambda_1 = 0 \qquad i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 2X - 4Y + 2 - \lambda_2 = 0 \qquad ii)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \,,\quad \lambda_1 = 0 \text{ HVIS } X < 2 \qquad iii)$$

$$\lambda_2 \geq 0 \,,\quad \lambda_2 = 0 \text{ HVIS } Y < 2 \qquad iv)$$

SER PÅ DE FIRE MULIGE KOMBINASJONENE AV λ_1 OG λ_2.

1. $\lambda_1 = 0$ OG $\lambda_2 = 0$.

DA BLIR i): $-2X + 2Y = 0 \Rightarrow X = Y$

ii) BLIR: $2X - 4Y + 2 = 0 \Rightarrow$

$2 \cdot Y - 4Y = -2$ SIDEN $X = Y$.

$\Rightarrow -2Y = -2 \Rightarrow Y = 1$.

$X = Y = 1$.

MULIG LØSNING SIDEN $X \leq 2$ OG $Y \leq 2$

NÅR $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$.

i) BLIR SOM I 1.: $-2X + 2Y = 0$

$\Rightarrow X = Y$. SIDEN $\lambda_2 > 0 \Rightarrow Y = X = 2$.

ii) BLIR NÅ: $2X - 4Y + 2 - \lambda_2 = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{2 \cdot 2}_{= X}\; - 4 \cdot \underbrace{2}_{= Y} = -2 + \lambda_2$$

$\Rightarrow -2 \cdot 2 = -2 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = -2 < 0$.

IKKE MULIG SIDEN $\lambda_2 > 0$.

3. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$

SIDEN $\lambda_1 > 0$, BLIR $X = 2$. KAN SETTE

INN FOR X I ii)

$$\underbrace{2 \cdot 2}_{X} - 4Y + 2 - \underbrace{0}_{\lambda_2} = 0 \Rightarrow$$

$$2 - 4Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{1}{2}$$

i) BLIR: $-2X + 2Y - \lambda_1 = -2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3$

IKKE MULIG SIDEN $\lambda_1 > 0$.

4. $\lambda_1 > 0$ OG $\lambda_2 > 0$.

DA BLIR $X = 2$ OG $Y = 2$.

i) BLIR: $-2X + 2\lambda - \lambda_1 = 0$.

$\Rightarrow -2\cdot2+2\cdot2-\lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_1=0.$

MEN $\lambda_1>0$, ALTSÅ IKKE MULIG.

MAKSIMUMSPUNTET BLIR $X=1$, $Y=1$ SIDEN BARE ALTERNATIV 1. ER MULIG.

MAKSIMAL OPTIMAND $= 3-1^2+2\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot1+2\cdot1 = 4$

EN RASKERE LØSNINGSMETODE ER Å NOTERE

IMANDEN $= 3-f(X,Y)$ FRA

a). SIDEN $X=1$ OG $Y=1$ VAR MINIMUM FOR $f(X,Y)$ OG $X=1$ OG $=1$ ER MULIG (BEGGE ≤ 2),

MÅ $X=1$ OG $Y=1$ MAKSIMERE

$3-f(X,Y).$