**Sensorveiledning SØK3008 H2023**

Detaljerte mellomregninger er ikke nødvendig, men optimeringsproblemene bør formuleres formelt, og ved sensur legges vekt på tolkning og bruk av resultatene.

Oppgave 1 a)

Kan ta litt innledning om timing: Først utformer prinsipalen kontrakten, så vil agenten akseptere (eller avslå). Deretter bestemmer agenten innsats, så bestemmes produksjonen som er en usikker variabel pga eksogene faktorer (vær og vind, konjunkturer, korona-restriksjoner etc). Til slutt bestemmes inntekten for prinsipalen og agenten.

Modell:

 = agentens innsats, = verdi av agentens produksjon. Dette er en usikker variabel med i = 1,2…,n ulike utfall.  sannsynligheten for at utfall i inntreffer. Denne sannsynligheten vil generelt være en funksjon av innsatsen e, 

 agentens lønn gitt at utfall i inntreffer, dvs at

 agentens nytte; 

 agentens reservasjonsnytte

 prinsipalens nytte der 

Forventet nytte for de to aktørene

Prinsipalen



Agenten





Deltakerbetingelsen – betingelsen for at agenten aksepterer kontrakten:

Agentens forventa nytte må være større eller lik reservasjonsnytten, 



Prinsipalens optimeringsproblem

Maksimer

 gitt at  mhp 

Formuler Lagrangesfunksjonen



Førsteordensbetingelsen



(1) 

Tolkning: Forholdet mellom grensenytten til prinsipalen og agenten skal være det samme i alle n tilstandene.

I tillegg til marginalbetingelsen (1) gjelder deltakerbetingelsen med likhet:

(2) 

Marginalbetingelsene gitt ved (1) gir sammen med deltakerbetingelsen (2) i alt n + 1 ligninger som bestemmer 

Spesialtilfelle med n = 2.

Marginalbetingelsen (1) skrives da

(3) 

Her kan vi omskrive første likheten til

(4) 

Tolkningen av betingelsen gitt ved (4) er da at optimal kontrakt er karakterisert ved at forholdet mellom grensenyttene av inntekt i de to tilstandene er likt for prinsipalen og agenten. Analogt resultat i standard velferdsteori: Forholdet mellom grensenyttene av to goder skal være likt for alle konsumenter. Marginal substitusjonsbrøk, her definert over ulike tilstander, skal være lik for de to aktørene.

Optimal tilpasning der prinsipalens indifferenskurve tangerer den indifferenskurven for agenten der denne oppnår reservasjonsnytten.

Sammenhengen mellom lønn og produksjon: Betydning av risikoaversjon

Tar utgangspunkt i

(1) 

som kan omskrives til

(5) 

Deriver gjennom denne mhp :

(6) 

Bruk at  som gir



(7) 

La

= absolutt risikoaversjon for prinsipalen

 = absolutt risikoaversjon for agenten

En aktør har risikoaversjon hvis den andrederiverte av nyttefunksjonen er negativ mens aktøren er risikonøytral hvis den andrederiverte er lik null. Aktøren har da en lineær nyttefunksjon.

Hvis begge aktørene har konstant absolutt risikoaversjon, er  og  begge konstanter,  er en konstant og fra (7) har vi da at

(8) 

Vi kan da argumentere for at den optimale lønnskontrakten tar formen:

(9) 



Vi ser videre at

 slik at økt verdi på brøken  gir redusert verdi på b.

Fra ligning (9)



Jo mer risikoavers agenten er i forhold til prinsipalen, jo lavere b – dvs desto svakere sammenheng mellom verdien på produksjonen og agentens lønn.

Hvis prinsipalen er risikonøytral, agenten er risikoavers har vi at som da medfører at 

Dette spesialtilfellet innebærer konstant lønn for agenten som da forsikres 100% mot usikkerhet mens prinsipalen bærer all risiko.

Oppgave 1b)

Situasjonen nå sammenlignet med oppgave 1a): Det er fortsatt usikkerhet om verdien av agentens produksjon pga eksterne forhold. Nå antas at agentens innsats ikke kan verifiseres. Her har vi altså en situasjon med asymmetrisk informasjon i motsetning til 1a) med symmetrisk informasjon

Kan se litt generelt på agentens valg av innsats når innsatsen er en kontinuerlig variabel. Deretter legges hovedvekt på en enklere situasjon der agenten kun kan velge to innsatsnivå: høy innsats eller lav innsats

Agentens forventa nytte er generelt gitt ved

(1) 

Agenten maksimerer forventa nytte mhp innsats e for gitt lønn. Dette gir førsteordensbetingelsen

(2) 

Marginal økning i forventa nytte av lønn skal være lik den marginale økningen i ulempen ved økt innsats.

Hva hvis lønna er konstant? Da har vi at

(3) 

der den siste likheten skyldes at 

Maksimering av forventa nytte gitt ved

(4) 

mhp e innebærer derfor minimering av innsatsen e.

Så da må prinsipalen utforme en lønnskontrakt slik at agenten faktisk gjør noe.

Forenklet modell

* Prinsipalen er risikonøytral 
* Agenten kan velge mellom høy og lav innsats:  hhv.
* Prinsipalen ønsker at agenten velger høy innsats (hvis ønsket innsats var lav blir problemet helt trivielt)

Vi lar fortsatt  være verdien av produksjonen i tilstand i og rangerer utfallene slik at



Vi lar videre

 sannsynligheten for at utfallet blir  gitt at agenten velger høy innsats og

 sannsynligheten for at utfallet blir  gitt at agenten velger lav innsats

Vi antar (hvilket også er intuitivt svært rimelig):

Hvis agenten velger høy innsats blir ssh for høy X større enn om agenten velger lav innsats. Eksempel: 

Tilsvarende: Hvis agenten velger lav innsats blir ssh for lav X større enn om agenten velger høy innsats. Eksempel: 

Prinsipalens målfunksjon, gitt forutsetningen om risikonøytralitet og ønske om høy innsats er gitt ved

(8) 

Deltakerbetingelsen, gitt høy innsats, skrives nå

(9) 

Insentivbetingelsen blir i dette tilfellet betingelsen for at agenten velger  og ikke  Da må følgende ulikhet gjelde:

(10) 

Prinsipalens optimeringsproblem

Vi antar nå at prinsipalen maksimerer målfunksjonen gitt de to bibetingelsene (deltakerbetingelsen og insentivbetingelsen).

Danner Lagrangesfunksjonen tilordnet dette problemet:

(11) 

Deriverer mhp på  og finner førsteordensbetingelsen:

(12) 

(13) 

For videre tolkning, divider gjennom med  som gir

(14) 

Hvis  da er  konstant. Da må også  være konstant. Men fast lønn innebærer som påpekt tidligere at agenten velger lavest mulig innsats. Vi fortsetter dermed med situasjonen der 

Fra (14) ser vi at det eneste som gir variasjon i lønn er variasjon i brøken  som ofte omtales som sannsynlighetskvoten (likelihood ratio).

For å ta det rent tekniske først:

Økt verdi på brøken  betyr at høyresiden i (14) reduseres. Da må også  reduseres, nevner må øke og siden  innebærer dette redusert lønn.

Motsatt vil redusert verdi på sannsynlighetskvoten, , implisere høyere lønn.

Nå er det intuitivt rimelig at  avtar med . Vi har rangert utfallene slik at . Videre har vi argumentert for at sannsynligheten for høy verdi på produksjonen er større ved høy innsats, , enn ved lav innsats,  Hvis vi i tillegg antar at  avtar monotont med økt verdi på produksjonen kan vi konkludere med at optimal lønn er en monotont stigende funksjon av produksjonsverdien.

Et optimalt lønnssystem avviker fra et fastlønnssystem fordi sannsynlighetskvoten  varierer med verdien på produksjonen. Prinsipalen må gi agenten insentiv til å velge høy innsats hvilket øker sannsynligheten for høy produksjonsverdi.

Betrakt igjen

(14) 

som implisitt definerer insentivsystemet. Insentivsystemet avhenger kun av sannsynlighetskvoten .

Når  er høyresiden i (14) lik  som kan sies å definere en referanse med fast lønn.

Hvis  «agenten straffes» for høy ssh for lav innsats.

Hvis  «agenten gis en bonus» for høy ssh for høy innsats.

Oppgave 2a)

Poenget her er at når arbeidere slutter i bedriften må disse erstattes av nye arbeidere. Dette innebærer kostnader knyttet til ansettelse og opplæring av nye arbeidere. Bedriften har derfor insentiver til å holde på eksisterende arbeidere.

La q være andelen av eksisterende arbeidere som slutter og anta at denne («quit-raten») er gitt ved

(1)  der



Forutsetning (i) økt relativ lønn reduserer quit-raten siden det blir mer fordelaktig å fortsette i bedriften. Forutsetning (ii) sier at denne effekten avtar (i tallverdi).

Forutsetning (iii) sier at økt arbeidsledighet reduserer quit-rate: Færre arbeidere vil slutte i eksisterende jobb siden høy arbeidsledighet betyr at det er vanskelig å finne en ny jobb. Om en bruker arbeidsledigheten som eneste mål på stramheten i arbeidsmarkedet kan en også argumentere for at ved høy ledighet er det ofte få ledige stillinger tilgengelig.

Forutsetning (iv) betyr at effekten av økt relativ lønn avtar (i tallverdi) med økt arbeidsledighet (quit-raten ar allerede lav når ledigheten er høy og da vil økt lønn ha liten effekt).

Vi lar videre bedriftens profitt være gitt ved

(2) 

Her er  på vanlig måte verdien av bedriftens produksjon, wN er ordinære lønnskostnader mens siste ledd i klammeparentensen reflekterer turnoverkostnaden:

Når quit-raten er q har vi at antall arbeidere som slutter og må erstattes er lik qN. Videre lar vi  være nominelle kostnader for hver nyansettelse og inkluderer ansettelses- og opplæringskostnader. Leddet qN representerer da bedriftens totale kostnader knyttet til gjennomtrekk / turnover.

Bedriften velger sysselsetting og lønn slik at profitten gitt ved (2) maksimeres. Førsteordensbetingelsene som løser dette optimeringsproblemet er gitt ved:

(3) 

(4) 

Betingelsen gitt ved (3) sier at verdien av arbeidskraftens grenseproduktivitet skal være lik totale kostnader per arbeider som her inkluderer lønn, w, pluss turnoverkostnader q.

Betingelsen gitt ved (4) sier at marginalkostnaden ved økt lønn skal balanseres mot den marginale gevinsten: Økt lønn reduserer quitraten med  på marginen. Multipliseres denne med kostnaden per oppsigelse, , får vi marginal gevinst per arbeider som altså er lik 

Betingelsen gitt ved (4) kan alternativt skrives

(5) 

Denne ligningen definerer da optimal lønn sett fra bedriftens side som funksjon av alternativlønna, ledighetsraten og kostnaden per quit:

(6) 

Virkning av en eksogen økning i ledighetsraten finnes tilsvarende ved å derivere gjennom (5) mhp u:



Her har vi antatt at både  og  slik at økt ledighetsrate vil gi bedriften insentiv til lavere lønn. Intuisjonen er at ved høy ledighet er det få arbeidere som slutter og da er gevinsten ved lønnsøkning i form av ytterligere redusert quit, liten.

Oppgave 2b)

Vi ser på en situasjon der bedriften bestemmer sysselsettingen mens lønn bestemmes ved forhandlinger mellom bedrift og fagforening.

Det spesielle ved situasjonen er at turnoverkostnadene reduseres ved økt lønn– en mekanisme som bedriften bør hensyn til ved lønnsforhandlingene.

Utgangspunktet er modellen brukt i 2a) der bedriftens profitt er gitt ved

(7) 

Videre skal sysselsettingen bestemmes slik at

(8) 

Denne definerer optimal sysselsetting som funksjon av lønn:

(9) 

Når vi utleder forhandlingsløsningen for lønn trenger vi å vite hvordan profitten endres med økt lønn når det tas hensyn til at høyere lønn gir redusert turnover. Vi tar utgangspunkt i bedriftens profitt innsatt *N = N(w)*:

(10) 

og finner da

(11) 

La fagforeningens objektfunksjon være gitt ved

(12) 

og anta at forhandlingslønna finnes ved å maksimere Nashproduktet gitt ved

(13) 

Her er  fagforeningens relative forhandlingsstyrke og som en forenkling er trusselpunktene satt lik null. For å finne betingelsen som bestemmer forhandlingslønna kan vi først ta log til Nashproduktet gitt ved (13):

(14) 

Førsteordensbetingelsen er da generelt gitt ved

(15) 

Om vi nå utnytter resultatet gitt ved

(16) 

kan (15) skrives som

(17) 

Siste ledd i (17) er positivt og reflekterer den marginale gevinsten for bedriften ved at økt lønn gir lavere turnoverkostnad. Dette bør bedriften ta hensyn til ved lønnsforhandlingene og dermed akseptere høyere lønn (enn den ellers ville gjort).

Hvis vi beholder forutsetningene i) – iv) fra 2a) kan vi utnytte resultatet mot slutten av dette delspørsmålet om at økt ledighet reduserer lønna. I forhandlingsmodellen vil de samme mekanismene gjøre seg gjeldende, formelt påvirke ledigheten lønna via siste ledd i (17), og vi kan konkludere med at økt arbeidsledighet også her reduserer lønna.