Sensorveiledning SØK1002 våren 2021

Eksamen ble gjennomført som digital hjemme-eksamen.

Ved karaktersettingen hadde oppgave 1 vekt 40% og oppgave 2 60%.

Teksten i uthevet kursiv nedenfor er oppgaveteksten (på bokmål).

Oppgave 1

a) Forklar følgende begrep: marginalprodukt, isokvant og teknisk substitusjonsbrøk.

Begrepet marginalprodukt gjelder en enkelt produksjonsfaktor, og viser hvor mye produksjonen av et gode øker når bruken av produksjonsfaktoren øker med én enhet. I matematiske modeller vil marginalproduktet til en produksjonsfaktor være den deriverte av produktfunksjonen med hensyn på vedkommende produksjonsfaktor. Det teller positivt å illustrere i en figur (med forklaringer).

Isokvanten viser hvordan to produksjonsfaktorer kan substitueres samtidig som produksjonsnivået er det samme (holdes konstant). Dette er illustrert i *figur 1*, som viser at produksjonsmengden $\tilde{y}$ kan oppnås med mange ulike kombinasjoner av de to produksjonsfaktorene K og L langs isokvanten som gjelder for produksjonsnivået $\tilde{y}$. Produktfunksjonen er $y = f(L, K)$, og andre produksjonsnivå enn $\tilde{y}$ gir andre isokvanter. Vi antar vanligvis at isokvanten har negativ helning og krummer mot origo (konveks). Dersom substitusjonsmulighetene i sammensetningen av produksjonsfaktorene er store, vil isokvantens krumming være liten, og ved perfekt substitusjon lineær. Motsatt vil fravær av substitusjon gi rettvinklede isokvanter. Det innebærer produksjonen er effektiv der βproduksjonsfaktorene akkurat står i et fast forhold til hverandre. Det teller positivt at disse spesialtilfellene nevnes og eventuelt illustreres i figurer.

Den tekniske substitusjonsbrøken (TSB) er tallverdien til helningen på en isokvant og viser hvor mye to produksjonsfaktorer kan substitueres i forhold til hverandre uten at produsert kvantum endres. Matematisk er TSB forholdet mellom marginalproduktivitetene til de to produksjonsfaktorene. TBS er avtakende (hvis vi ikke har ett av spesialtilfellene nevnt ovenfor), som betyr at hvis det brukes mye av én produksjonsfaktor kan mye av denne faktoren erstattes med en relativt liten økning i den andre, slik som illustrert i punktene a og b i *figur 1*.

En bedrift produserer en vare Y med produktfunksjonen $Y = K^{\alpha}L^{\beta}$, hvor K står for realkapital og L for arbeidskraft. K og L er de eneste produksjonsfaktorene.

b) Vis at denne bedriften har en produksjonsteknologi som tilfredsstiller kravene til isokvant og teknisk substitusjonsbrøk.

Kravet til en isokvant er, som svart på oppgave 1a), at den har negativ helning og er konveks. Isokvanter som tilfredsstiller disse kravene tilfredsstiller også kravene til meningsfull TSB.

Helningen til isokvanten finner vi enten ved å totaldifferensiere produktfunksjonen eller ved implisitt derivasjon, som gir svaret

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\beta K}{\alpha L} < 0,$$

og som viser at iskovanten har negativ helning, under den eneste rimelige forutsetningen at α, β > 0.

Langs isokvanten er K en funksjon av L [K=K(L), eller L=L(K)] siden y er konstant som vi må ta hensyn til når vi skal undersøke om isokvanten er konveks, som er det samme som å undersøke om den andrederiverte er positiv, dvs. $\frac{dK}{dL} = -\frac{\beta K(L)}{\alpha L}$, som derivert mhp. L gir svaret

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{\beta K}{\alpha L^2}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) > 0,$$

og som viser at iskovanten er konveks.

<u>Konklusjon</u>: Produksjonsteknologien beskrevet ved $Y = K^{\alpha}L^{\beta}$ tilfredsstiller kravene vi stiller til isokvanter og teknisk substitusjonsbrøk.

c) La prisen pr. enhet arbeidskraft være w og prisen pr. enhet realkapital være q, og finn sammenhengen mellom arbeidskraft (L) og realkapital (K) som minimerer produksjons-kostnadene. Hva er tolkningen av denne sammenhengen?

Dette handler om å finne faktorkombinasjoner som gir lavest mulig kostnad til gitt produksjonskvantum, som vi f.eks. kan sette til $\tilde{y}$. Svaret finnes da ved å løse følgende problem:

$$\text{Min. } C = wL + qK \text{ m.h.p. } L \text{ og } K \text{ gitt at } \tilde{y} = f(L, K)$$

Lagrangefunksjonen $\mathcal{L}(L, K, \lambda)$ bør settes opp og deriveres m.h.p. K, L og Lagrangemultiplikatoren, λ. De to førsteordensbetingelsene $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0$ og $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0$ gir optimal faktorbruk:

$$\frac{\beta K}{\alpha L} = \frac{w}{q} \text{ som alternativt kan skrives } K = \frac{w}{q}\frac{\alpha}{\beta}L$$

Denne kostnadsminimerende tilpasningen innebærer at produksjonsfaktorene K og L skal velges slik at forholdet mellom marginalproduktene er lik relative faktorpriser. Med konstante priser gir dette en lineær sammenheng (substitumal) mellom de to produksjonsfaktorene, slik at faktorbruken vil være proporsjonal.

Sammenhengen (substitumalen) avhenger av faktorprisene og parameterne i produktfunksjonen. Jo høyere relativ pris på arbeidskraft (w i forhold til q) og jo større relativ betydning realkapitalen har i produksjonen (størrelsen på α relativt til β), jo mer kapital skal brukes i produksjonen. Motsatt hvis prisen på realkapital er høy relativt til prisen på arbeidskraft, og/eller arbeidskraften har større produktivitet enn realkapital.

Løsningen kan med fordel illustreres i en figur som også inkluderer isokvanter, men er ikke noe krav for en god karakter.

d) Dersom α + β = 1 er det konstant skalautbytte i produksjonen. Forklar hvordan bedriften i dette tilfellet vil tilpasse produksjonen på lang sikt, når både K og L kan varieres.

I dette tilfellet er den langsiktige kostnadsfunksjonen C(y) lineær, slik at den langsiktige marginalkostnaden er konstant og lik gjennomsnittskostnaden: C(y) = cy, hvor c er lik den konstante gjennomsnittskostnaden og også lik marginalkostnaden. Tilbudskurven er horisontal. I dette tilfellet vil ikke profittmaksimering med en gitt produktpris, p, gi en løsning for produsert kvantum: Enten vil c > p og y = 0, c = p og y ubestemt eller c < p og y uendelig stor. Den eneste mulige løsningen blir etterspørselsbestemt produksjon: Bedriften velger det produksjonsnivået som gir etterspørsel slik at prisen blir lik marginalkostnaden. Dette kan også med fordel illustreres i en figur.

Oppgave 2

Petter har preferanser for fritid (F) og konsum (X) gitt ved nyttefunksjonen $U = X^a F^{1-a}$, hvor X er en variabel som representerer konsum av goder og F er timer med fritid. Parameteren a er en positiv konstant.

a) ***Forklar hva Petters marginale substitusjonsbrøk ($MSB_{X,F}$) for X og F uttrykker.***

Den marginale substitusjonsbrøken viser hvordan Petter verdsetter fritid i forhold til konsum. Matematisk er MSB tallverdien til helningen på en indifferenskurve som svarer til et bestemt nyttenivå. Vanligvis antar vi at indifferenskurvene har negativ helning og krummer mot origo. MSB for konsum og fritid uttrykker derfor hvor mye mer fritid Petter må ha for å gi opp en enhet konsum, og slik at nytten er uendret.

b) ***Hvis Petters marginale substitusjonsbrøk er X/3F ($MSB_{X,F}$ = X/3F), hvor stor er da parameteren a, og hvordan vil du tolke Petters nyttevektlegging av X og F?***

For å svare på dette spørsmålet må vi først finne uttrykket for MSB med den oppgitte nyttefunksjonen, som kan gjøres enten ved å totaldifferenseiere nyttefunksjonen eller ved implisitt derivasjon.

Totaldifferensiering gir $dU = aX^{a-1}F^{1-a}dX + (1-a)X^aF^{-a}dF = 0$, som ordnet gir

$$MSB_{X,F} = -\frac{dX}{dF} = \frac{(1-a)X}{aF}$$

Med $MSB_{X,F}$ = X/3F finner vi a ved å løse følgende likning for a: $\frac{(1-a)X}{aF} = \frac{X}{3F}$ som gir **a = 0,75** siden $\frac{(1-a)}{a} = \frac{1}{3}$. Tolkningen er at Petter vektlegger konsum mye høyere enn fritid, faktisk så høyt at han er villig til å gi fra seg tre enheter fritid mot en ekstra enhet konsum.

Petter har et lite, men konstant søvnbehov, og klarer seg med 6 timer søvn pr. døgn. Resten av døgnet kan han bruke til fritid (F) og arbeid (A). Han har også en jobbsituasjon med stor fleksibilitet, som gjør at han kan velge fritt hvor mye han vil arbeide hvert døgn. Timelønna hans er W og prisen pr. enhet av konsumgodene er P.

c) ***Hva blir Petters arbeidstilbud, dvs. hvor mange timer i døgnet vil han velge å arbeide hvis a = 0,5? Hvor mange timer fritid velger han?***

Dette spørsmålet kan besvares på litt forskjellige måter, og avhengig av om en har med arbeidsfri inntekt i budsjettrestriksjonen eller ikke. Uansett løsning gjelder det at Petters tilgjengelige tid til arbeid og fritid er 18 timer i og med at han skal sove 6 timer pr. døgn, dvs. A + F = 18.

Hvis vi forutsetter at hele inntekten kommer fra arbeid, altså at arbeidsfri inntekt er lik null, er det enkle svaret at han vil fordele de 18 timene likt mellom arbeid og fritid, fordi konsum og fritid vektes likt i nyttefunksjonen (a=0,5). Dette gjelder denne typen nyttefunksjon. Svaret er altså A* = F* = 9. Dette godtas som svar, men det må begrunnes riktig.

De fleste vil nok svare på spørsmålet ved å bruke lagrange.

Løsninger med Lagrange:

1. <u>Løsning med Lagrange, *uten* arbeidsfri inntekt</u>

Maks $U(X,F) = X^a F^{1-a}$ mhp. X og F gitt at $PX = (18 - F)W$

Her er det ikke satt inn a = 0,5, fordi i oppgave 2d) skal en annen a-verdi brukes.

Dette gir Lagrangefunksjonen $\mathcal{L} = X^a F^{1-a} - \lambda(PX - W(18 - F)$, og de tre førsteordensbetingelsene $(1)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0,\ (2)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = 0$ og $(3)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$.

Fra likningene (1) og (2) fås tangeringsbetingelsen:

$$X = \frac{a}{(1-a)}\frac{W}{P}F \quad (*)$$

Når vi setter tangeringsbetingelsen $(*)$ inn i likning (3), altså budsjettrestriksjonen, får vi: $-P\left(\frac{a}{(1-a)}\frac{W}{P}F\right) + W(18 - F) = 0$ som er det samme som $-\left(\frac{a}{(1-a)}F\right) + (18 - F) = 0$.

Med a = 0,5 blir dette – F + 18 – F = 0, dvs. 2F = 18 og <u>**F* = 9**.</u>

Siden arbeidstilbudet (A) følger fra betingelsen A + F = 18 blir <u>**A* = 18 – F* = 9.**</u>

2. <u>Løsning med Lagrange, *med* arbeidsfri inntekt:</u>

I dette tilfellet blir Lagrangefunksjonen $\mathcal{L} = X^a F^{1-a} - \lambda[PX - W(18 - F) - m]$

Tangeringsbetingelsen blir som $(*)$ ovenfor, som i innsatt i budsjettbetingelsen nå gir

$$-P\left(\frac{a}{(1-a)}\frac{W}{P}F\right) + W(18 - F) + m = 0 \quad (**)$$

Med a = 0,5 reduseres dette uttrykket til – WF + 18W – WF + m = 0, og løsningen <u>**F* = 9 + m/2W**</u>.

For arbeidstilbudet blir løsningen <u>**A* = 18 – F* = 9 – m/2W**</u>.

Vi ser at hvis m = 0, får vi samme løsning som under 1.

Mellomregningene er ikke tatt med her, men bør være med i en god besvarelse.

Det teller positivt hvis løsningene er illustrert i figurer.

d) Hvordan blir svaret på c) dersom a endres til 0,75? Er endringen i Petters arbeidstilbud som forventet? Begrunn svaret.

Det følger direkte fra svaret på 2c) at likningen $(**)$ nå blir $-P\left(3\frac{W}{P}F\right) + W(18 - F) + m = 0$. Da følger det at – 3WF – WF + 18W + m = 0 som gir <u>**F* = 4,5 + m/4W**</u> og <u>**A* = 13,5 – m/4W**</u>.

Hvis Petter *ikke* har arbeidsfri inntekt blir **F* = 4,5 og A* = 13,5**.

Uavhengig av den arbeidsfrie inntekten øker arbeidstilbudet når *a* er øker, og grunnen er at konsum (som kan kjøpes for arbeidsinntekt) vektlegges sterkere i Petters preferanser. Her er det også mulig å svare direkte at fordelingen av tilgjengelig tid på fritid og arbeidstid følger direkte fra denne typen nyttefunksjon, gitt at Petter ikke har inntekt utenom arbeid.

e) Hvordan endres Petters arbeidstilbud (A) av endringer i prisen P og lønnssatsen W? Vurder om svaret er som forventet.

Hvis Petter *ikke har arbeidsfri inntekt (m=0)*, ser vi fra svarene på spørsmålene 2c) og 2d) at arbeidstilbudet ikke blir påvirket av hverken pris- eller lønnsendringer. Grunnen er at substitusjonseffekten (SE) motsvares akkurat av inntektseffekten (IE) for fritid – og arbeidstid med motsatt fortegn – når nyttefunksjonen er Cobb-Douglas.

Fra svaret på spørsmål 1b), hvor vi bruker akkurat samme type funksjon, fant vi at isokvantene (som blir motstykket til indifferenskurvene i denne oppgaven) har negativ helning med krumning mot origo. Det betyr at det er substitusjonsmuligheter mellom fritid og konsum. Reallønna, W/P, er implisitt prisen på fritid. Så når den endres, vil det oppstå substitusjon. Økt reallønn øker prisen på fritid, slik at Petter vil substituere seg vekk fra fritid til mer arbeidstid, dvs. SE < 0 for fritid, og motsatt for arbeidstid. Men økt reallønn øker inntekten, og når fritid er et normalt gode, som i dette tilfellet, vil IE > 0, og IE er akkurat like stor som SE med motsatt fortegn. Så de IE og SE utligner hverandre, altså ingen effekt på arbeidstilbudet – det ligger fast på enten 9 eller 13,5 timer, avhengig av størrelsen på a.

Hvis Petter *har arbeidsfri inntekt (m≠0)*, vil nominell lønn påvirke arbeidstilbudet. Fra svarene på 2c) og 2d) følger det at økt W øker arbeidstilbudet, men økningen i antall arbeidstimer av en gitt lønnsøkning blir mindre desto større arbeidstilbudet er. Både den positive sammenhengen og at effekten på arbeidstilbudet er mindre jo større arbeidstilbudet er, er rimelig og samsvarer med det vi forventer.

Mer overraskende er det at endringer i prisen ikke påvirker arbeidstilbudet, fordi en prisendring påvirker reallønna. Forklaringen er imidlertid her også at IE og SE utligner hverandre. Økt P reduserer reallønna, noe som gir SE > 0 for fritid (SE < 0 for arbeidstid) fordi fritid blir billigere, men IE < 0 (IE > 0 for arbeidstid) fordi Petter kan kjøpe mindre konsum for en gitt arbeidsinnsats fordi P har økt.

Her teller det også positivt om effektene illustreres i figurer.

f) Noen økonomer har argumentert for at det bør innføres borgerlønn i Norge. Borgerlønn er en inntekt som alle får, uavhengig av hvor mye de arbeider. Andre har argumentert mot borgerlønn fordi det reduserer arbeidstilbudet. Hvor høy må borgerlønna på døgnbasis være for at Petter velger å ikke jobbe i det hele tatt når α = 0,5? Illustrer løsningen i dette tilfellet grafisk.

Borgerlønn er det samme som arbeidsfri inntekt. Så hvis en har løst oppgavene 2c) og 2d) med arbeidsfri inntekt i budsjettrestriksjonen, er det enkelt å finne det kritiske nivået for borgerlønna.

På spørsmål 2c) ble svaret A* = 9 – m/2W. Hvis borgerlønna, dvs. m, er lik eller høyere enn 18W, vil ikke Petter arbeide i det hele tatt: 0 = 9 – m/2W gir **m* = 18W**.

På spørsmål 2d) ble svaret A* = 13,5 – m/4W. Hvis borgerlønna, dvs. m, er lik eller høyere enn 54W, vil ikke Petter arbeide i det hele tatt: 0 = 13,5 – m/4W gir **m* = 54W**.

Løsningen illustrert i *figur 2*.

Petters kompis Ola har preferanser for fritid (F) og konsum (X) gitt ved nyttefunksjonen $\boldsymbol{U = (X+2)(F+1)}$***. Hans søvnbehov er det samme som Petters, og han har akkurat samme fleksibilitet i jobbsituasjonen, og står overfor den samme prisen P og lønnssatsen W.***

g) Finn et uttrykk for Olas arbeidstilbud, og et uttrykk for hvor mye arbeidstilbudet endres hvis lønnssatsen W endres med 1%. (Elastisiteten i arbeidstilbudet med hensyn på nominell lønnssats)

Spørsmålet kan besvares ved å bruke Lagrange, men kan også løses ved å ta utgangspunkt i det vi allerede vet, nemlig at tilpasningen blir der MSB_{XF} er lik reallønna, altså realprisen på fritid.

Ved totaldifferensiering av nyttefunksjonen, eller implisitt derivasjon, finner vi at den marginale substitusjonsbrøken i dette tilfellet blir (X+2)/(F+1). Tangeringsbetingelsen blir derfor

$$-\frac{dX}{dF} = MSB_{X,F} = \frac{X+2}{F+1} = \frac{W}{P},$$

som gir denne sammenhengen mellom konsum og fritid: X = (F+1)W/P – 2.

X = (F+1)W/P – 2 satt inn i budsjettbetingelsen når vi forutsetter at den arbeidsfrie inntekten er null, blir

$$P\left[\frac{(F+1)W}{P} - 2\right] = W(18-F)$$

Dette uttrykket løst mhp. F gir

$$F = 8{,}5 + \frac{P}{W}$$

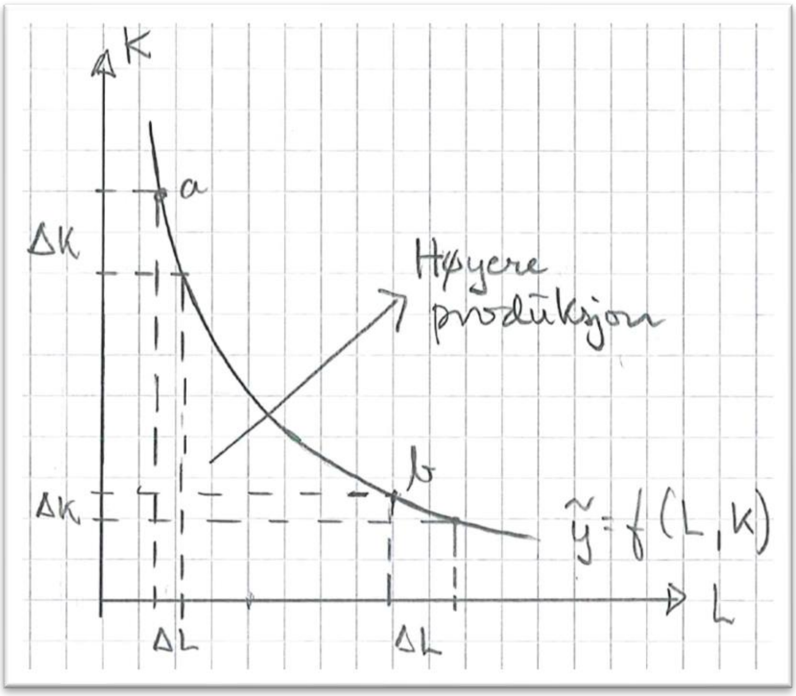
Siden arbeidstilbudet er A* = 18 – F*, blir løsningen **A* =** 18 – 8,5 – P/W = **9,5 – P/W**.

Arbeidstilbudselastisiteten er definert som relativ endring i tilbudte arbeidstimer (A*) som følge av en relativ endring i lønnssatsen (W): $\frac{\frac{dA^*}{A^*}}{\frac{dW}{W}} = \frac{\partial A^*}{\partial W}\frac{W}{A^*}$.

Siden $\frac{\partial A^*}{\partial W} = \frac{P}{W^2}$ blir elastisiteten $\boldsymbol{\frac{\partial A^*}{\partial W}\frac{W}{A^*} = \frac{P}{W^2}\frac{W}{A^*} = \frac{P}{9{,}5W - P}}$.

Figurer

Figur 1



Figur 2