1

a) $\dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \underline{\underline{x+3}}$

Bruk ABC-formelen for å fullfaktorisere

b) $\dfrac{e^{x^2+x-6}}{e^{x-2}} = e^{x^2+x-6-(x-2)} = \underline{\underline{e^{x^2-4}}}$

c) $\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}} = \dfrac{x^3}{x^2} = \underline{\underline{x}}$

d) $\ln\frac{1}{x^2} - \ln\frac{1}{x^3} = \ln 1 - \ln x^2 - (\ln 1 - \ln x^3)$

$= -2\ln x + 3\ln x = \underline{\underline{\ln x}}$

2

a) $x^2+x-6=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2\cdot 1} = \dfrac{-1\pm 5}{2} = \underline{\underline{-3}}, \underline{\underline{2}}$

b) $e^{x^2+x-6} = 1 \Leftrightarrow \ln e^{x^2+x-6} = \ln 1 \Leftrightarrow$

$x^2+x-6=0$. Fra a) vet vi at $\underline{\underline{x_1=-3}}$ og $\underline{\underline{x_2=2}}$

c) $\ln(x^2+x-5)=0 \Leftrightarrow e^{\ln(x^2+x-5)} = e^0 \Leftrightarrow$

$x^2+x-5=1 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$. Fra a): $\underline{\underline{x_1=-3}}, \underline{\underline{x_2=2}}$

d) $\dfrac{1}{\ln(x-2)} = 0 \quad |\cdot \ln(x-2) \Rightarrow 1=0$

↳ likningen har <u>ingen løsning</u>.

③ a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

b) $f(x) = (x^4+2)(e^x + \ln x)$

$$f'(x) = 4x^3(e^x + \ln x) + (x^4+2)(e^x + \frac{1}{x})$$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x - 2x \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)$

$$= \ln 3x^2 - \ln(x+2)$$

$$= \ln 3 + 2\ln x - \ln(x+2)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{2(x+2) - x}{x(x+2)}$$

$$= \frac{x+4}{x(x+2)}$$

④ $f(x) = x + \frac{1}{x-3}$

a) $f(x)$ er definert for alle $x \setminus x=3$: D_f: ~~$3 > 3 < x > 3$~~ ~~$3 > x > 3$~~ $x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = 0 \iff (x-3)^2 = 1 \iff$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 2, 4$$

c) $f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$. $f''(x) < 0$ for $x < 3$ og

d) $f''(x) > 0$ for $x > 3$

$\Rightarrow$ konkav for $x < 3$ og konveks for $x > 3$

e) Ser fra c) og d) (eventuelt ved 1. der. testen) at $f(x)$ har et lokalt maksimum for $x = 2$.

f) Ser fra c) og d) at $f(x)$ har et lokalt min. for $x = 4$.

g) Se neste side.

g)

Vi ser at når $x \to -\infty$ vil $f(x) \to -\infty$.

Når $x \to \infty$ vil $f(x) \to \infty$.

Den lokale maks.-verdien er

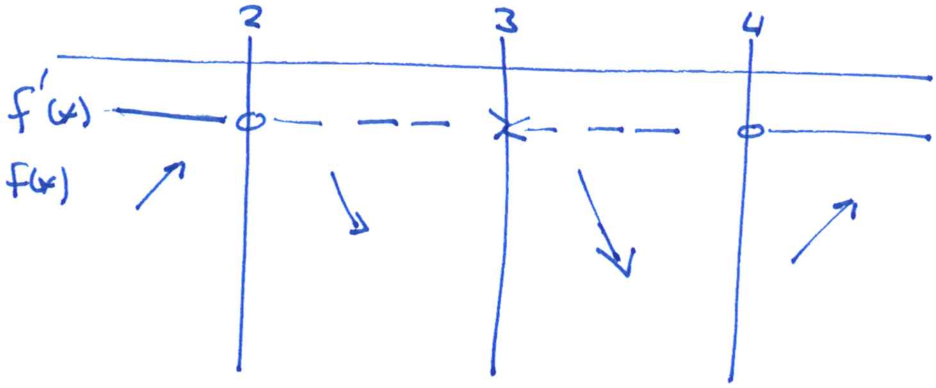
$$f(2) = 2 + \frac{1}{2-3} = 2 - 1 = \underline{1}$$

Den lokale min.-verdien er

$$f(4) = 4 + \frac{1}{4-3} = 4 + 1 = 5$$

Vi ser at når $x \to 3^-$ (altså nedenfra), vil $f(x) \to -\infty$.

Når $x \to 3^+$ (altså ovenfra), vil $f(x) \to +\infty$.



Verdimengden må da være

$$\underline{\underline{V_f: \langle -\infty, 1] \cup [5, \infty\rangle}}$$

⑤

$$f(x,y) = x^2 + xy - y^2$$

a) Vi finner de førstederiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1'(x,y) = 2x + y = 0 \iff y = -2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_2'(x,y) = x - 2y = 0 \iff x - 2(-2x) = 0 \iff$$

$$5x = 0 \iff x = 0.$$

$\hookrightarrow$ $y = -2 \cdot 0 = 0.$

Stasjonært punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

b) Vi bruker andrederiverttesten for å klassifisere det stasjonære punktet:

$$f''_{11}(x,y) = 2 = A$$

$$f''_{12}(x,y) = 1 = B$$

$$f''_{22}(x,y) = -2 = C$$

Vi ser at $AC - B^2 = 2 \cdot (-2) - 1^2 = -5 < 0$

$\hookrightarrow$ Det stasjonære punktet $(0,0)$ er et <u>sadelpunkt</u>.

⑥

$$\max_{x,y} U(x,y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$$

u.b.b

$$px + qy = I$$

$$\mathcal{L} = \alpha \ln x + \beta \ln y - \lambda(px + qy - I)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\alpha}{x} - \lambda p = 0 \iff x = \frac{\alpha}{\lambda p}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\beta}{y} - \lambda q = 0 \iff y = \frac{\beta}{\lambda q}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff px + qy = I \iff p\underbrace{\frac{\alpha}{\lambda p}}_{x} + q\underbrace{\frac{\beta}{\lambda q}}_{y} = I \iff$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda} = I \iff \lambda = \frac{\alpha + \beta}{I}$$

Setter inn for λ i x og y:

$$x = \frac{\alpha}{\frac{(\alpha+\beta)p}{I}} = \underline{\underline{\frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p}}}$$

$$y = \frac{\beta}{\frac{(\alpha+\beta)q}{I}} = \underline{\underline{\frac{\beta I}{(\alpha+\beta)q}}}$$

7 $\quad x^2 - xy + y^2 = 12$

a) Vi bruker implisitt derivasjon for å finne y':

$$2x - (y + xy') + 2yy' = 0 \iff$$

$$y'(-x + 2y) = y - 2x \iff$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{y - 2x}{2y - x}}}$$

b) Stasjonære punkt krever at $y' = 0$:

$$\frac{y - 2x}{2y - x} = 0 \iff y - 2x = 0 \iff y = 2x$$

Vi setter inn i det implisitt gitte uttrykket for y:

$$x^2 - x \cdot 2x + (2x)^2 = 12 \iff$$

$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 12 \iff$$

$$3x^2 = 12 \iff x^2 = 4 \Rightarrow \underline{x = \pm 2}$$

Vi har dermed to stasjonære punkt:

$$\underline{\underline{(-2, -4)}} \text{ og } \underline{\underline{(2, 4)}}$$

c) Tangenten til y er vertikal når $y' \to \infty$.

Dette skjer her når nevneren $\to 0$:

$y' \to \infty$ betyr at $2y - x \to 0$

$2y - x = 0 \Leftrightarrow x = 2y$.

Innsatt får vi:

$(2y)^2 - 2y \cdot y + y^2 = 12 \Leftrightarrow$

$4y^2 - 2y^2 + y^2 = 12 \Leftrightarrow$

$3y^2 = 12 \Leftrightarrow$

$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

Tangenten er vertikal i punktene

$\underline{\underline{(-4, -2)}}$ og $\underline{\underline{(4, 2)}}$

8

a) Serielån har like store avdrag hvert år:

$$\frac{2.000.000}{20} = \underline{100.000}.$$

Rente første år blir

$$2.000.000 \cdot 0{,}05 = \underline{100.000}$$

Renter og avdrag første år blir derfor

$$100.000 + 100.000 = \underline{\underline{200.000}}$$

b) Det siste året gjenstår bare det siste avdraget, så lånebeløpet er kr 100.000. Det gir en rente på $100.000 \cdot 0{,}05 = \underline{5.000}$

Renter og avdrag det siste året blir derfor

$$100.000 + 5.000 = \underline{\underline{105.000}}$$

c) Lånebeløpet går ned med kroner 100.000 per år. Rentene synker derfor med kroner $100.000 \cdot 0{,}05 = 5000$ per år. De årlige rentene og avdragene kan derfor formuleres som en aritmetisk følge og vi får at

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{200.000 + 105.000}{2} = \underline{\underline{3.050.000}}$$