EKSAMEN SØK 3004 HØST 2023

OPPGAVE 1

a) $\int (6x^2 + 2x)\,dx = 2x^3 + x^2 + C$

b) $\int \frac{\ln(x)}{2x}\,dx$

SETTER $u = \ln(x)$. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \frac{1}{2x} \cdot dx$

$\int u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} u^2 + C$

$= \frac{1}{4}[\ln(x)]^2 + C$

c) MÅ BRUKE DELVIS INTEGRASJON TO GANGER.

$$f = x^2,\ g' = e^x,\ f' = 2x,\ g = e^x$$

$$\int f \cdot g' \, dx = \int x^2 e^x \, dx = f \cdot g - \int (f' \cdot g) \, dx$$

$$= x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx + C_1 \quad (1)$$

FINNER $\int x e^x \, dx$ VED DELVIS INTEGRASJON.

$$f = x,\ g' = e^x,\ f' = 1,\ g = e^x$$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x e^x - e^x + C_2$$

SETTER INN FOR $\int x e^x \, dx$ I (1):

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\left[x e^x - e^x + C_2\right] + C_1$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2C_2 + C_1$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

d)

KURVEN LIGGER ALLTID OVER X-AKSEN

$$\text{AREALET} = \int_0^4 \left[(x-2)^2 + a\right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 + ax\right]_0^4 = \left[\frac{8}{3} + 4a\right]$$

$$- \left[-\frac{8}{3} + 0\right] = \frac{16}{3} + 4a$$

$a = 4 \Rightarrow$ AREALET $= 16 + \frac{16}{3} = 21\frac{1}{3}$

$a = 0 \Rightarrow$ AREALET $= \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

OPPGAVE 2

a) $A + B = \begin{bmatrix} 17 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \cdot 9 - 1 \cdot 4 & 8 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 9 - 3 \cdot 4 & 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 68 & -20 \\ -3 & -14 \end{bmatrix}$$

$$DET(A) = 8 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -23$$

$$DET(B) = 9 \cdot 4 - 4 \cdot (-2) = 44$$

$$DET(AB) = DET(A) \cdot DET(B) = -1012$$

b)

$$\mathbb{C}\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2\cdot 3 + 2\cdot 2 + 0\cdot 0 & 2\cdot(-2) + 2\cdot 4 + 0\cdot 2 \\ 0 & 3\cdot 3 - 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-2) - 1\cdot 4 + 2\cdot 2 \\ 0 & 1\cdot 3 - 1\cdot 2 + 4\cdot 0 & 1\cdot(-2) - 1\cdot 4 + 4\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{DET}(\mathbb{C}\mathbb{D}) = 0$$

VI HAR IKKE FULL RANG. ALTSÅ ER

RANG < 3 (SIDEN DET $= 0$).

DET ER FLERE MINORER ULIK 0. FOR EKSEMPEL

$$\text{DET}\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} = -60-28 < 0$$

$\Rightarrow$ RANG = 2.

c)

LIGNINGSSYSTEMET BLIR:

$$1 \cdot Z = m \Rightarrow Z = m$$

$$2 \cdot Y + 3 \cdot Z = m$$

$$\Downarrow$$

$$Y = \frac{m}{2} - \frac{3 \cdot Z}{2} = \frac{m}{2} - \frac{3}{2} m$$

$$Z = m, \quad Y = \frac{m}{2} - \frac{3}{2} m$$

$m = 3$ OG $n = 11$ GIR

$z = 3$, $y = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{2}{2} = 1$

OPPGAVE 3

a) $\dot{x} + 2x = -3$

$a(t) = 2$, $b(t) = -3$

INTEGRERENDE FAKTOR BLIR:

$$e^{2t}$$

MULTIPLISERER PÅ HVER SIDE MED e^{2t}:

$$\underbrace{\dot{x}e^{2t} + 2xe^{2t}}_{\frac{d(xe^{2t})}{dt}} = -3e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad xe^{2t} = \int -3e^{2t}\,dt + C_1$$

$$= -3 \cdot \frac{1}{2}e^{2t} + C_2 + C_1 = -\frac{3}{2}e^{2t} + C$$

$$x = Ce^{-2t} - \frac{3}{2}$$

9

b) $\dot{x} = \frac{4t}{x} \Rightarrow x \cdot \frac{dx}{dt} = 4t$

$\Rightarrow x \cdot dx = 4t \cdot dt$

INTEGRERER PÅ BEGGE SIDER :

$$\frac{x^2}{2} + C_1 = 2t^2 + C_2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4t^2 + 4(C_2 - C_1)$$

$$= 4t^2 + C$$

$t = 1$ GIR $x = 2 \Rightarrow C = 0.$

$$x^2 = 4t^2 \Rightarrow x = \pm 2t.$$

SIDEN $t \geq 1$ OG $x \geq 2$,

BLIR LØSNINGEN

$$x = 2t.$$

c) VI MÅ FØRST FINNE GENERELL LØSNING FOR DEN HOMOGENE LIGNINGEN.

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0.$$

SETTER $x = e^{rt}$

11

$$\underbrace{r^2 e^{rt}}_{\ddot{x}} - \underbrace{3re^{rt}}_{3\dot{x}} + \underbrace{2e^{rt}}_{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} - 2 \cdot 1} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= +\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = 2, 1$$

$$r_1 = 2, \; r_2 = 1$$

LØSNINGEN FOR DEN HOMOGENE LIGNINGEN BLIR:

$$X(t) = Ae^{2t} + Be^{t}$$

SIDEN 6 ER EN KONSTANT BLIR PARTICULÆR-LØSINGEN TIL DEN IKKE-HOMOGENE LIGNINGEN OGSÅ EN KONSTANT.

KALL $X^*(t) = C$. INNSATT FOR X BLIR LIGNINGEN

$$\underbrace{\ddot{X}}_{=0} - 3\underbrace{\dot{X}}_{=0} + 2C = 6$$

$$\Downarrow$$

$$C = 3 = X^*(t)$$

LØSNINGEN PÅ LIGNINGEN I c) BLIR FØLGENDE:

$$X(t) = Ae^{2t} + Be^{t} + 3$$

LIGNINGEN ER IKKE GLOBALT ASYMP. STABIL DA $r_1 > 0$ OG $r_2 > 0$.

NÅR $t \to \infty$ VIL $X(t) \to \pm \infty$.

OPPGAVE 4

a) STASJONÆRPUNKTET ER GITT VED

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 8y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -4 \cdot \underset{\underset{x}{\parallel}}{y} + 8 \cdot y = 4 \Rightarrow 4y = 4$$

$$\Rightarrow y = 1$$

STASJONÆRPUNKTET BLIR

$$x^* = y^* = 1.$$

FINNER HESSE MATRISEN.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$$

HESSEMATRISEN : $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

HOVEDMINORENE ER:

$$D_1 = 4 \quad , \quad D_2 = 4 \cdot 8 - (-4 \cdot (-4)) =$$
$$32 - 16 = 16 > 0$$

SIDEN $D_1 > 0$ OG $D_2 > 0$

HAR VI ET MINIMUMSPUNKT.

b) PROBLEMET ER AV TYPE 4 FRA KAPITTEL 3 I 'FURTHER MATHEMATICS'. LØSES VED EN VARIANT AV KUHN-TUCKER BETINGELSENE.

16

LAGRANGE-UTTRYKKET BLIR:

$$L = 5 - x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y - \lambda_1 (x-3) - \lambda_2 (y-2)$$

1. ORDENSBET.:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x + 2y - \lambda_1 \begin{cases} = 0 & \text{HVIS } x > 0 \\ < 0 & \text{HVIS } x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x - 4y + 2 - \lambda_2 \begin{cases} = 0 & \text{HVIS } y > 0 \\ < 0 & \text{HVIS } y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

KOMPLEMENTÆR SLACK BET.:

$$\left.\begin{array}{lll} x < 3 & \text{HVIS} & \lambda_1 = 0 \\ x = 3 & \text{HVIS} & \lambda_1 > 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{lll} y < 2 & \text{HVIS} & \lambda_2 = 0 \\ y = 2 & \text{HVIS} & \lambda_2 > 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

VI HAR FIRE MULIGE KOMBINASJONER AV λ_1 OG λ_2: FOR HVER KAN $X/Y > 0$ ELLER $= 0$.

A. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

A1. $X > 0$

1 GIR $X = Y$

2 GIR $2Y - 4Y + 2 \leq 0$ $\Rightarrow -2Y + 2 \leq 0$

$\Rightarrow Y \geq 1$. SIDEN $Y > 0 \Rightarrow -2Y + 2 = 0$

FRA 2 $\Rightarrow Y = 1$.

SIDEN $Y = 1$, BLIR $X = 1$ FRA 1.

A2. $X = 0$

1 BLIR DA: $-2 \cdot 0 + 2Y - 0 < 0$

$\Rightarrow 2Y < 0$, SOM IKKE ER MULIG.

B. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$

FRA 3 HAR VI AT $X = 3$ HVIS $\lambda_1 > 0$.

INNSATT I 2 FOR $X = 3$ OG $\lambda_2 = 0$, FÅR VI:

$$2 \cdot 3 - 4Y + 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad -4Y \leq -4 \quad \Rightarrow Y \geq 1.$$

SIDEN $Y \geq 1$, MÅ ② HOLDE MED LIKHET ($Y > 0$) SLIK AT $Y = 1$.

FOR Å SJEKKE OM $X = 3$ OG $Y = 1$ ER MULIG LØSNING, SETTEN VI INN I ①:

$$-2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -6 + 2 = -4.$$

λ_1 KAN IKKE VÆRE NEGATIV (VI HAR ANTATT AT $\lambda_1 > 0$), SÅ DETTE ER IKKE MULIG

LØSNING

C. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$

FRA ④ HAR VI AT $Y = 2$ HVIS $\lambda_2 > 0$. INNSATT I ① FOR $Y = 2$ OG $\lambda_1 = 0$, FÅR VI:

$-2X + 2 \cdot 2 - 0 = 0 \Rightarrow X = 1.$

SJEKKER OM $X = 1$ OG $Y = 2$ ER MULIG LØSNING VED Å SETTE INN I 2:

$$2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2 - \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 2 - 6 + 2 = -2$$

λ_2 KAN IKKE VÆRE NEGATIV (VI HAR ANTATT AT λ_2 ER POSITIV). $X = 1$ OG $Y = 2$ ER DERFOR IKKE MULIG LØSNING.

D. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

FRA 3 OG 4 HAR VI: $X = 3$ OG $Y = 2$.

INNSATT I 1 FÅR VI:

$$-2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -6 + 4 = -2$$

λ_1 KAN IKKE VÆRE < 0.

$X = 3$ OG $Y = 2$ ER IKKE MULIG LØSING.

VI HAR KUN ÉN MULIG LØSNING, FRA A1.

$$X = Y = 1$$

DEN SAMME LØSNINGEN FINNER VI VED Å

SE AT DET SOM SKAL MAKSIMERES I

b) ER LIK $5 - \frac{f(x,y)}{2}$ FRA a).

LØSNINGEN BLIR DERFOR X OG Y SOM

MINIMERER $f(x,y)$, GITT AT BIBET ER

OPPFYLT. LØSNINGEN, $X = Y = 1$, FRA a)

TILFREDSSTILLER BIBET. $X = Y = 1$ ER

FØLGELIG LØSNING.