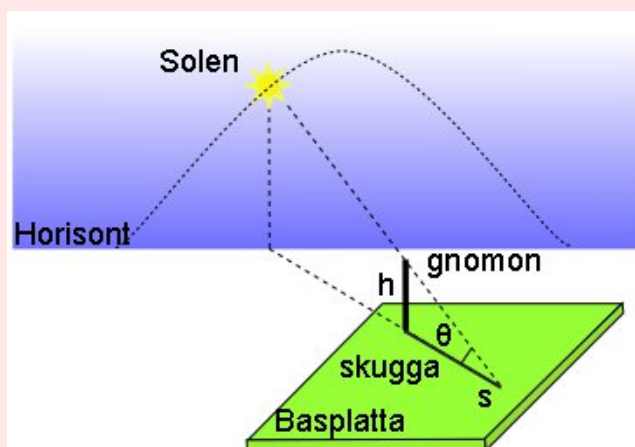


*Jonas Persson*

## ASTRONOMI – LABORATIVA MOMENT



Trondheim

Program for  
lærerutdanning

Skolelaboratoriet  
for matematikk, naturfag  
og teknologi

## Tidligere utgitt i SLserien

- Nr. 1, aug. 2003: Jan Ove Rein: **Hold og stell av vandrende pinner***
- Nr. 2, okt. 2003: Rossing, Stefansson, Bungum: **Elektronikk for skolen***
- Nr. 3, nov. 2003: Rossing, Kind: **Kreativitet og skaperglede***
- Nr. 4, aug. 2004: Rossing, Fagerli, Dinesen: **Teknologi i skolen,  
"Bygg et hus"***
- Nr. 5, sept. 2004: Karoliussen: **Fornybare energikilder** (utgått)*
- Nr. 6, apr. 2005: Næss: **Luft og strømninger***
- Nr. 7, des. 2005: Rossing: **Fra elektriske kretser til intelligente hus***
- Nr. 8, apr. 2006: Karoliussen: **Energi for framtiden***
- Nr. 9, juli. 2006: Rossing, Kjeldstad: **Fysikkløypa ved NTNU***
- Nr.10, nov. 2006: Bungum: **Mekaniske leker: Prinsipper og ideer***
- Nr. 11, des. 2006: van Marion: **Feltarbeid i naturfag og biologi***
- Nr. 12, feb. 2007: Rossing, Fagerli: **Varmepumper og solfangere***
- Nr. 13, mai 2007: Sviland, Jensen, Moe, Borg: **Gråspurv, farskap og  
forskningsmetode***
- Nr. 14, aug. 2012: Persson: **Videoanalys i fysikundervisningen***

# **ASTRONOMI – LABORATIVA MOMENT**

ISBN 978-82-7923-063-2

ISSN 1503-9242

Trondheim 2013

Layout og redigering: Jonas Persson

Redaktører for SLserien: Peter van Marion  
Astrid Johansen  
Nils Kr. Rossing

Publikasjoner i skriftserien kan kjøpes  
ved henvendelse til:

**Skolelaboratoriet for matematikk,  
naturfag og teknologi, NTNU**

Realfagbygget

Høgskoleringen 5

7491 Trondheim

e-post: [ellen.duister@plu.ntnu.no](mailto:ellen.duister@plu.ntnu.no)

Telefon: 73 55 11 43

Telefaks: 73 55 11 40

<http://www.ntnu.no/skolelab/>

Faglige spørsmål rettes til:

**Institutt for fysikk, NTNU**

**v/Jonas Persson**

Realfagbygget, Høgskoleringen 5

7491 Trondheim

Telefon: 73 59 33 39

<http://www.ntnu.no/fysikk/>

Rev 1.0 – 30.04.2013

# Astronomi – Laborativa moment

**Jonas Persson**

Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi, NTNU



## Forord fra redaktørene

Astronomi er et spennende tema som undervises på alle trinn i skolen. Temaet fenger de fleste, men får (naturlig nok) i hovedsak en teoretisk vinkling. Mange har sikkert savnet gode aktiviteter og forsøk innen dette emnet.

Jonas Persson presenterer i dette heftet mange praktiske forsøk som bør være et kjærkomment tilskudd til undervisningen innenfor temaet astronomi i videregående skole. Siden flere av forsøkene er klassiske og viser hvordan astronomer brukte sine kunnskaper både i matematikk og fysikk for å utforske verdensrommet, vil de også være av vitenskapshistorisk interesse i tillegg til det realfaglige. Eksempler på dette er måling av størrelse og avstand til månen og sola, størrelsen til sola og ikke minst jordas diameter. Avstanden til sola var f.eks. en meget viktig størrelse som skaleringsfaktor for resten av solsystemet.

Heftet omtaler også bruk av moderne målemetoder basert på bruk av digitale hjelpemidler som f.eks. videoanalyseprogrammet Tracker.

Vi håper derfor heftet kan være nyttig støttelitteratur for læreren og et supplement til undervisningen i fysikk i videregående skole. Noe vil også kunne anvendes i naturfag på Vg1, i teknologi og forskningslære og i matematikk på ulike trinn.

Trondheim 30.04.2013

Peter van Marion

Astrid Johansen

Nils Kr. Rossing





## Forord

Astronomi är ett tacksamt ämne att undervisa. Många, både vuxna och barn, har ett intresse för det. Dock har ämnet blivit mer berättande än ett praktiskt ämne. Här tänker jag inte bara på möjligheten att gå ut en mörk stjärnklar kväll och se vad det finns på himlen utan att göra något mer, att visa vad man har använt astronomi till.

Vi tänker kanske inte på det idag, men man kunde redan för flera tusen år sedan besvara frågor som vi idag använder ganska avancerad utrustning till. Vi får bättre resultat men här handlar det om principer.

Jag vill med detta häfte ge lärare och elever möjligheten att hitta projekt där man utnyttjar ”experimentell” astronomi, inte bara för astronomins skull utan även med den koppling till andra ämnen som är möjlig. Dessa experiment kan utföras genom egna observationer, men det är även möjligt att använda planetarie-program och så ett lika bra eller bättre resultat. Men ett planetarie-program kan inte ersätta egna observationer.

Jonas Persson  
30 April 2013



# Innhold

<b>Forord fra redaktørene</b>	<b>7</b>
<b>Forord</b>	<b>9</b>
<b>Innhold</b>	<b>11</b>
<b>Inledning</b>	<b>13</b>
<b>Solur – mer än bara tid</b>	<b>15</b>
Tillverkning av en gnomon	15
Mätningar	16
Solens rörelse på himlen – introduktion	16
Solur	17
Solens rörelse på himlen – daglig rörelse	18
Solkompass	20
Solens rörelse på himlen – årlig variation av solhöjden	24
Solens rörelse på himlen – när står den som högst på himlen	25
Genvägar för den otålmodige	29
<b>Solens storlek och jordbanans eccentricitet</b>	<b>31</b>
Solens storlek - mätning	31
Solens storlek – variation under året	32
Genvägar för den otålmodige	34
<b>Jordens omkrets</b>	<b>35</b>
Egna mätningar	36
Genvägar för den otålmodige	36
<b>Månens avstånd och storlek</b>	<b>37</b>
Bestämning av avståndet till månen	37
Förenklad metod	37
Avancerad modell	40
Månbanans eccentricitet	42
<b>Avståndet till solen</b>	<b>45</b>
När är månen halv?	45
Hur mäta vinkeln mellan solen och månen?	46
Erfarenheter	49
<b>En övning i geometri – de inre planeternas banradier</b>	<b>51</b>
<b>En övning i geometri – de yttre planeternas banradier</b>	<b>55</b>
Resa i solsystemet – Jordens elongation från de yttre planeterna	57

<b>Hertzsprung-Russel Diagram</b>	<b>61</b>
Introduktion	61
Konstruktion av eget HR-diagram	63
Användning av HR-diagram för att åldersbestämma en stjärnhop	65
<b>Tracker</b>	<b>69</b>
<b>Gravitationskonstanten på månen</b>	<b>71</b>
<b>Solfläckar</b>	<b>75</b>

## Inledning

Astronomi som ämne har fascinerat människor sedan tidernas begynnelse. Det är ett av de äldsta och fortfarande till stora delar ett okänt område som människor har studerat. Man brukar säga att astronomi tillsammans med medicin är de två äldsta vetenskaperna. Medicin har alltid behövts för att kunna förstå hur man ska göra för att läka en skadad kropp. Astronomi eller kunskap om stjärnhimlen, solen och månen, har också alltid funnits där som ett mysterium för människan. Stjärnhimlens statiska utseende har bara då och då brutits av kometer och då har dessa ofta betraktats som omen för dåliga tider mm. Under årtusenden har kunskapen om stjärnhimlen och rymden bara ökat och ökat och idag är informationsflödet från alla de instrument som finns på jorden och i rymden ofattbart stort. Nya upptäckter görs varje dag men för varje fråga som får ett svar kommer det minst tio nya frågor! Trots att vi vet så oerhört mycket mer idag än tidigare så blir bara universum mer och mer obegripligt för de allra flesta. Storleken på universum och avstånden mellan galaxer är så otroligt stora så att det mänskliga intellektet har stora problem att förstå dem. Till detta kommer nästan bisarra saker så som svarta hål, mörk materia och mörk energi...

Trots allt detta finns fascinationen kvar och våra barn och ungdomar, vars intellekt inte är 'spärrat', förundras av universum precis som vi lite äldre gjorde en gång (och förhoppningsvis fortfarande gör). Genom att utnyttja denna egenskap hos barn och ungdomar kan vi kanske göra så att de blir mer och mer intresserade av naturvetenskap och teknik, så att de i framtiden väljer att utbilda sig inom dessa områden. (Jämför med ROSE undersökningen, <http://roseproject.no/> )

Skolan och kanske framför allt pedagogerna har här den viktiga rollen att stimulera detta intresse. Astronomi är idag ett ofta mycket uppskattat område inom naturvetenskapen oavsett ålder på barnen. Ofta hör man dock att det kan vara svårt att göra lämpliga experiment med eleverna som kan ge dem utmaningar och glädje. Denna bok är tänkt att ge nya experimentella uppslag som kan lyfta astronomiundervisningen till nya himmelska höjder!

Övningarna och experimenten som presenteras här är i sig inte direkt knutna till kompetansmålen i læreplanerna, men det finns direkta och indirekta kopplingar till dem. I læreplanen i Naturfag, Verdensrommet står det.

Dette hovedområdet dreier seg om vårt eget solsystem, jordas plass og det ytre verdensrom. Gjennom forskning og teknologiske nyvinninger øker kunnskapen om verdensrommet. Mediene informerer hyppig om denne kunnskapen. Emnet egner

seg til å trekke inn framtidsperspektiver og åpner dermed for nysgjerrighet, undring og fascinasjon.

Vilket ger grunden for detta häfte. Mer specifikt kan följande mål kopplas till specifika kapitel:

	<i>Mål for opplæringen er at eleven skal kunne</i>	Övningar/experiment
Etter 4. årstrinn	finne informasjon med og uten digitale verktøy og fortelle om noen av planetene i vårt solsystem	Alla där planetarieprogram används.
Etter 7. årstrinn	beskrive en modell for solsystemet og hvordan denne kan forklare observerte fenomener, inkludert dag og natt, månefaser og solas bevegelse over himmelen	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Solur – mer än bara tid</li> <li>– Solens storlek och jordbanans eccentricitet</li> <li>– Jordens omkrets</li> <li>– Månens avstånd och storlek</li> <li>– Avståndet till solen</li> <li>– En övning i geometri – de inre planeternas banradier</li> <li>– En övning i geometri – de yttre planeternas banradier</li> </ul>
Etter 10. årstrinn	beskrive planetenes bevegelser over himmelen ved bruk av animasjoner og forklare hvordan sol- og måneformørkelse og årstider oppstår	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Solur – mer än bara tid</li> <li>– Solens storlek och jordbanans eccentricitet</li> <li>– Jordens omkrets</li> <li>– Månens avstånd och storlek</li> <li>– Avståndet till solen</li> <li>– En övning i geometri – de inre planeternas banradier</li> <li>– En övning i geometri – de yttre planeternas banradier</li> </ul>
Fysikk 1	gjøre rede for hvordan informasjon om stjerner er systematisert i et HR-diagram	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Hertzsprung-Russel Diagram</li> </ul>

Det finns dock element i övningarna/experimenten som väl lämpar sig för tvärfagliga studier och bruk i andra fag. Matematik där geometri spelar en stor roll för några av övningarna. Men även geografi och historia är möjliga fag där det finns kopplingar.

De övningar som beskrivs i häftet kan genomföras med observationer av himlakropparna, men man kan även göra dom med planetarieprogram. Det program som jag använt mig av är ett open source program som kan laddas ner utan kostnad: Stellarium (<http://stellarium.org/>).

Fördelen med detta program är att man kan välja språk, vilket gör det enklare för dom som inte behärskar astronomiska termer på engelska.

## **Solur – mer än bara tid**

Solur är troligvis en av de äldsta astronomiska instrumenten som används av människan. Ett solur kan tillverkas med hjälp av en enkel vertikal stav, en gnomon. När solen lyser på gnomonen så kommer den att kasta en skugga på marken. Det blir då möjligt att registrera solens rörelse över himlen med hjälp av skuggan. Har man en graderad skal på marken blir det möjligt att säga vilken tid på dagen det är. Men det är möjligt att använda gnomonen (soluret) till mycket mer än att bara säga vad klockan är. I detta kapitlet skall vi just titta på detta.

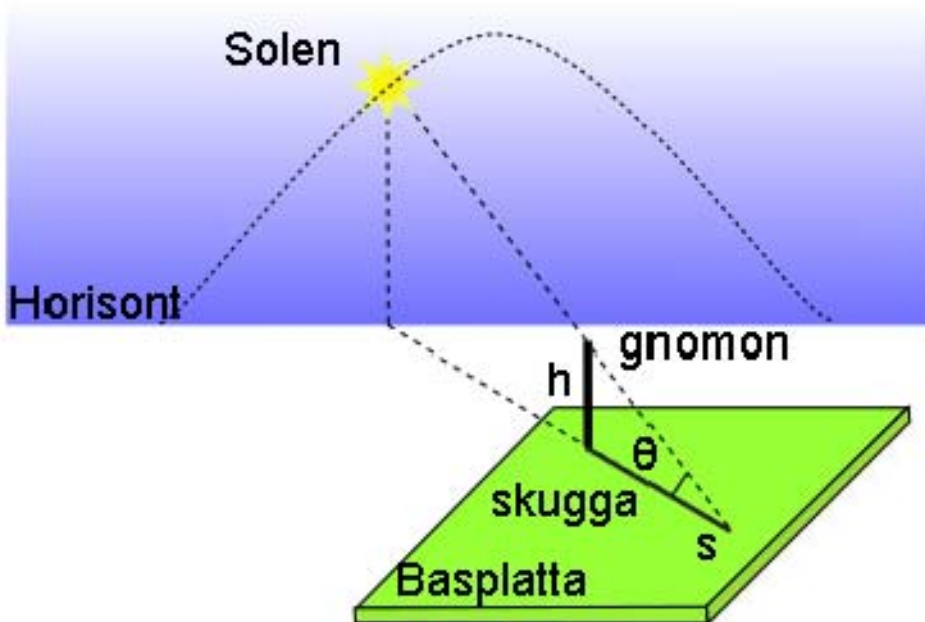
En mycket bra websida om solur finns på Nordnorsk vitensenters hemsida:

<http://nordnorsk.vitensenter.no/himmel/solursida/>

### **Tillverkning av en gnomon**

Gnomonen är i princip enbart en stav, men för att man skall kunna använda den på bästa sätt bör den placeras på en jämn horisontal yta. Man kan med fördel använda sig av en plywood skiva och placera gnomonen i mitten. Gnomonen behöver inte sättas i mitten utan detta beror på vilket syfte man har. För ett solur är mitten bäst, men skall man mäta skuggans längd behövs inte det. Men här måste man tänka på att skuggan kan bli ganska lång när solen står lågt, vilket gör att man inte kan låta staven bli för hög. Står solen 10° grader över horisonten blir skuggan nästan 6 gånger längre än staven är hög. Samtidigt vill man kunna mäta noggrannt vilket gör att staven inte får vara för kort.

Väljer man att tillverka en basplatta som är 40x40 cm<sup>2</sup> och vill mäta solhöjder ner till 10° kan inte staven vara mer än ca 3 cm, om gnomonen placeras i mitten, vilket den inte behöver. Här får man ta en avgörelse av vad man vill mäta, för mätning under en dag behöver staven vara kort, men mäter man bara solhöjden mitt på dagen kan staven vara längre. Här är det lämpligt att se till behovet först.



Figur 1 Enkelt solur

## Mätningar

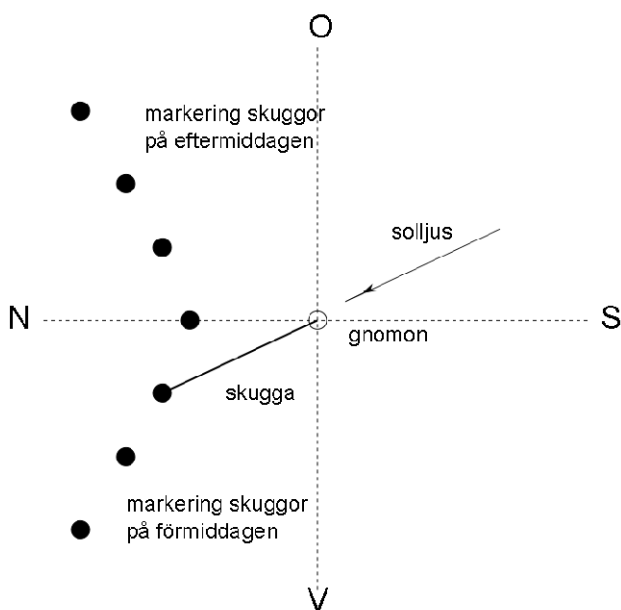
När man konstruerat sin gnomon är det dags att börja använda den för mätningar. Nu är det viktigt att basplattan står horisontalt och att gnomonen står vertikalt, kontrollera detta med ett vattenpass (vater), då detta kommer att ge ett fel. Även med ett vattenpass bör man räkna med att man får en osäkerhet på ca:  $1^\circ$ . Vi kommer i tillägg få ett litet fel genom att solen har en utsträckning och kastar därför en något oskarp skugga. Det enklaste är att mäta längden direkt med en linjal, man kan om man vill sätta fast papper på basplattan och indikera skuggans längd på det sättet. Samtidigt behöver vi veta när mätningen gjordes. I det kommande försöken så är en noggrannhet på ca: 1 minut tillräcklig, något som man utan problem får med dagens klockor. Det kan dock vara en god ide att ställa klockan mot en känd tid.

## Solens rörelse på himlen – introduktion

Det första försöket går ut på att se hur skuggans längd och position ändrar sig under en dag. Här behövs egentligen inte gnomonen vi tillverkade utan en flaggstång eller annan stav går lika bra. Placera staven på en öppen plats där solen skiner hela dagen. Stick staven i marken och använd något, ex. stenar, för att markera skuggans position. Placera ut stenarna allt eftersom dagen fortskrider. Man kommer då att se att stenarna bildar en båge. Där stenarna



som placerats ut på morgonen och sent på eftermiddagen hamnar långt från staven, medan dom som placerats ut mitt på dagen befinner sig närmare staven.



**Figur 2 Markering av gnomonens skugga under dagen**

Den punkt på bågen som befinner sig närmast staven kommer nu att indikera när solen står som högst på dagen och den riktningen från staven till bågen visar var norr är. Tidpunkten då detta sker är den lokala middagen. Observera att denna tidpunkt inte nödvändigtvis är kl 12.00 (eller 13.00 sommartid). Detta beror på att vi har tidszoner vilket gör att den lokala middagen (när solen står som högst på himlen) inträffar klockan 12.00 bara om longituden är en hel multipel av  $15^\circ$ . Detta är inte helt sant som vi skall se senare, men det är en god approximation.

## Solur

Genom att ha en fast monterad gnomon kan man nu markera på marken skuggans position för olika klockslag. Man får då en möjlighet att kunna säga vad klockan är genom att se på skuggans position. Korrigerar man för sommartid så fungerar den hela året. Men visar den verkligen rätt hela tiden? Detta är ett enkelt projekt som kan genomföras genom dagliga undersökningar. Vi kommer dock se att soluret inte ger rätt tid hela året utan

att det drar sig eller går fortare beroende när på året det är. Detta kan man titta på med denna uppställningen , men vi kommer göra det mer noggrant senare.

### **Solens rörelse på himlen – daglig rörelse**

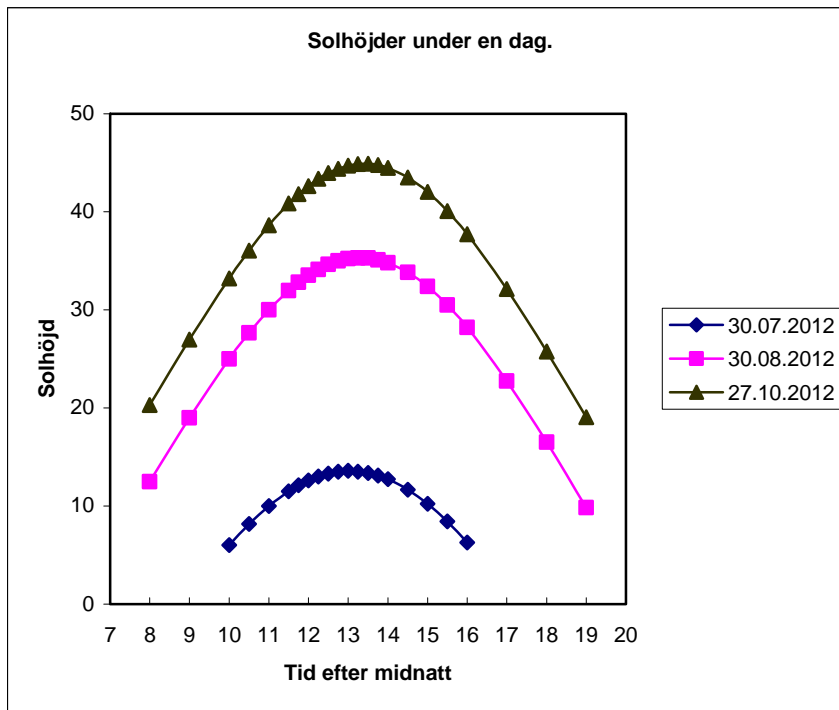
Det som är mest intressant är att mäta solhöjden, det vill säga höjden över horisonten, och hur den ändras under dagen. Vet man höjden på gnomonen ( $h$ ) och mäter skuggans längd ( $s$ ) är det enkelt att räkna ut solhöjden ( $\theta$ ):

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{h}{s} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{h}{s}\right)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Eftersom vi enbart är intresserade av solhöjden behöver inte basplattan orienteras på ett speciellt sätt eller stå på samma ställe under dagen, så länge som den är horisontal. Detta gör att basplattan kan stå inomhus om man vill.

Tiden och den registrerade solhöjden tabelleras och plottas i ett diagram. Vi kommer senare att titta på årstidsvariationen av solhöjden, varför detta är något man skall göra flera dagar under året.

Figur 3 visar hur solhöjden varierar under en dag. Vi ser att solhöjdens maximala värde ( $\theta_{\max}$ ) beror på datumet. Vi ser också att tidpunkten ( $t_{\max}$ ) när detta inträffar också varierar. Detta är något som inte är allmänt känt och som vi skall behandla senare.



**Figur 3 Solhöjder (i grader över horisonten) för tre dagar i Trondheim**

Vi har nu två parametrar som vi behöver bestämma från  $\theta(t)$ , nämligen  $\theta_{\max}$  och  $t_{\max}$ . Det är möjligt att ta det teoretiska uttrycket för  $\theta(t)$  och anpassa till den, men vi bör hellre hålla en mer empirisk linje och anpassa till ett polynom i stället. Det teoretiska uttrycket baseras på sfärisk geometri och kommer göra saker mer komplicerade. Anpassningen gör lämpligast till denna funktion:

$$\theta(t) = \theta_{\max} + \sum_{i=1}^3 h_{2i} (t - t_{\max})^{2i} \quad (1.2)$$

där vi har fem justerbara parametrar,  $\theta_{\max}$ ,  $t_{\max}$  och koefficienterna  $h_{2,4,6}$ . Genom att använda tre koefficienter (sjätte ordningen) får man en bättre anpassning för tider långt från  $t_{\max}$ , men tar man tider  $\pm 3-4$  timmar runt  $t_{\max}$  kan man använda två koefficienter (fjärde ordningen). Onoggrannheten i  $\theta_{\max}$  och  $t_{\max}$  beror på antalet mätpunkter som används. Tar man mätdata ungefär var 15 min blir osäkerheten ca  $0,25^\circ$  och 1 min. Måste man hoppa över mätpunkter blir osäkerheten större.

Vi kommer att använda  $\theta_{\max}$  och  $t_{\max}$  senare, men nu skall vi se vad man kan använda den kurva som vi fått fram för en dag till.

## Solkompass

Från figur 3, såg vi att det blir en skillnad mellan kurvorna för olika dagar. Då vi vet att kurvornas utseende beror på datum kan vi använda dessa kurvor för att grovt bestämma tid på året. Vi har inte så bra säkerhet att vi kan bestämma datum.

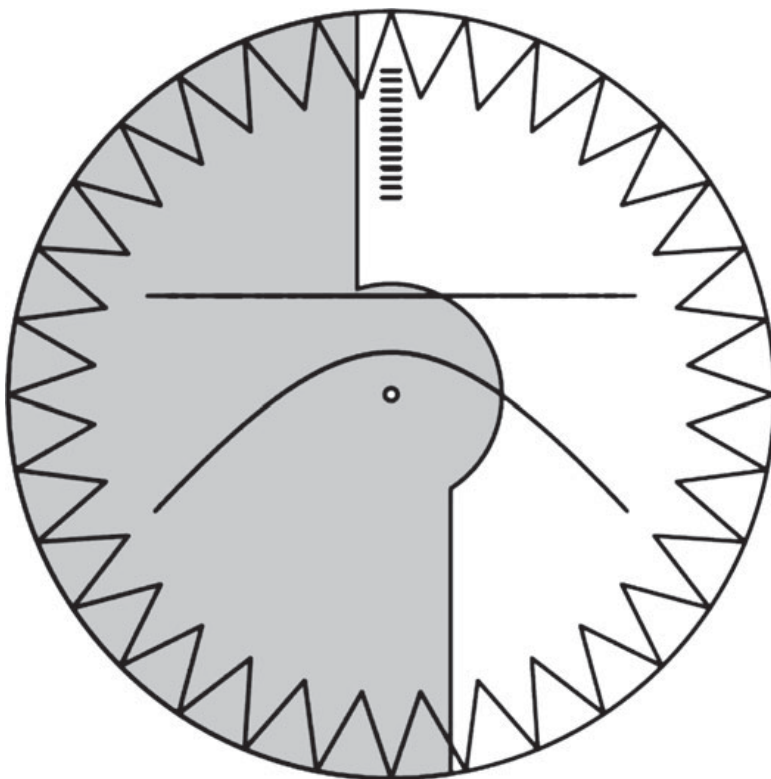
Men detta kan användas på ett annat sätt. Vi vet att hur högt solen står som högst beror dels på datum men även var på jorden man befinner sig. Vi ser då att breddgraden eller latituden är viktig. Det vill säga att om vi befinner oss på samma latitud så kommer solkurvan att se likadan ut. Med andra ord om vi kan ta upp solkurvan så kan vi jämföra den med en bestämd solkurva för att veta var vi är, i alla fall när det gäller latituden. När det gäller att bestämma longituden måste vi ha en klocka som visar rätt tid.

Dock är det så att bara genom att veta latituden så vet vi väldigt mycket. Dom flesta vet att polstjärnan befinner sig i norr, och om man kan hitta den på himlen så vet man alltid var norr är. Men är man ute på havet måste man veta mer för att kunna navigera. Detta gjorde att man under antiken fram till 1600-talen ofta var begränsade till att segla nära kuster för att kunna känna igen landmärken, vilket var uppgifterna för lotsar. Här var kartor med avritade landmärken viktiga. Man kunde använda sig av solhöjden men då visste man inte hur långt det var till land.

Arkeologiska fynd från Grönland, tyder på att vikingarna använde sig av en så kallad solkompass. I princip samma som vi gjort ovan, en gnomon som är monterad i centrum av en cirkulär skiva och som kommer att kasta en skugga om den hålls horisontellt.



**Figur 4** Fragment av "solkompass", hittad i Østerbygda på Grönland. *Från: Viking navigation: sun-compass guided Norsemen first to America, Thirlund 2001.*



**Figur 5** Rekonstruerad "solkompass".

För att använda sig av den kalibrerades den exempelvis dagen innan avresa, genom att man ritade in skuggans läge med jämna mellanrum under dagen och ritade (ristade) en kurva (gnomonkurva) genom dessa markeringar. När solkompassen användes hölls den horisontellt och vreds tills skuggan föll på gnomonkurvan - då kunde man läsa av nordriktningen, sin egen kurs och tiden på dagen, genom att man låg på samma latitud. Men då solhöjden ändras måste man ha en ny gnomonkurva efter en tid. Det låter svårt att hålla något horisontellt på havet med sjögång, men här kan man låta skivan som gjordes i trä, flyta i en hink med vatten, vilket garanterar att den ligger horisontalt. Detta gäller dock när vi har relativt liten sjögång.

Att detta är användbart ser man direkt om man titta på en karta över Norska havet i norra Atlanten. Vi ser här att om man håller sig på samma latitud så kommer man alltid att träffa på land eller komma så nära land att man genom att observera djur och moln kan se att land är nära. Detta gör att genom att segla från bestämda startpunkter alltid kommer att hitta rätt. Det enda som man inte vet hur långt det är kvar. Det är därför mycket sannolikt att vikingarna hade kunskaper om detta och använde dom för att segla västerut.

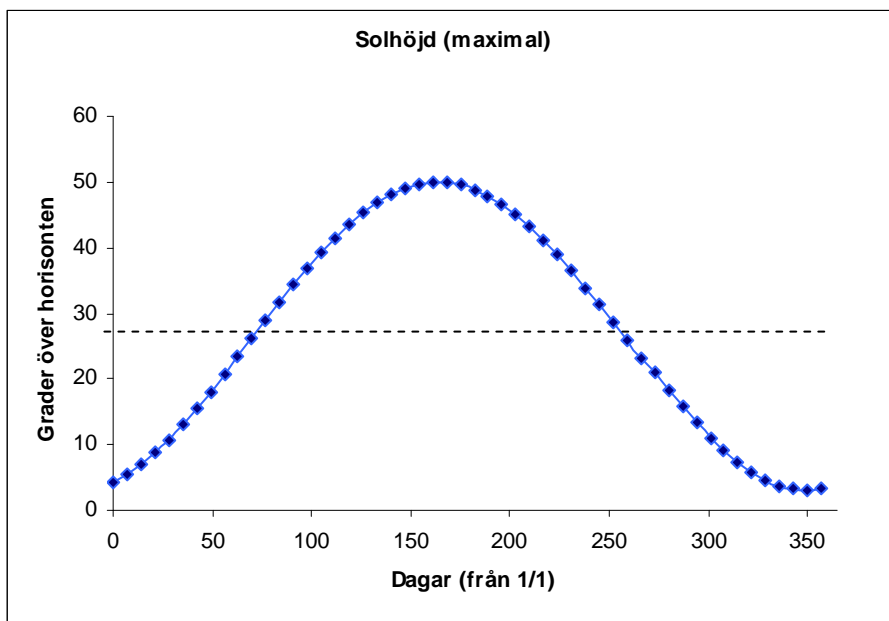


**Figur 6** Karta över Norska havet i norra Atlanten. *NormanEinstein/Wikimedia Commons/Creative Attribution-Share Alike 3.0 Unported*

Hur ofta måste man byta skiva? Prova detta genom att jämföra kurvorna som ni ritar upp med jämna mellanrum. Går den att använda två veckor efter avresan? Hur lång tid tog en isländsfärd för vikingarna? (Svaret på detta finns i dom isländska sagorna.)

## Solens rörelse på himlen – årlig variation av solhöjden

Genom att ta upp en solkurva, typiskt varje vecka under året, kommer man att kunna bestämma den årliga variationen av den maximala solhöjden på din observationsort. Denna variation kan man använda för att bestämma latituden och jordaxelns lutning ( $\varphi$ ). Studera figur 7 som visar den maximala solhöjden som funktion av datum. Vi ser att den har ett sinusliknande utseende.



Figur 7 Maximal solhöjd som funktion av antal dagar från 1 Januari. (Trondheim, Latitud: N 63° 26' 24")

Förklaringen till detta utseende är enkelt och lärs ut i geografin. På grund av att jordens axel lutar kommer vinkeln mellan jordaxeln och linjen som förbinder jordens centrum med solens centrum att variera mellan  $90^\circ - \varphi$  vid sommarsolståndet (då axeln lutar mot solen) och  $90^\circ + \varphi$  vid vintersolståndet (då axeln lutar från solen). Detta gör att vinkeln mellan himmelspolen (nära polstjärnan) och solen kommer att variera med en amplitud på  $\varphi$  och en period på ett år. Variationen sker runt ett medelvärde som bestäms av latituden ( $\lambda$ ) på observationsorten.



Nu kan man visa att denna variation i solhöjden, med god approximation, beskrivs av:

$$\theta_{\max} = 90^\circ - \lambda + \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right) \quad (1.3)$$

Där  $T$  är längden på ett år och  $t_0$  datum för vårdagjämningen (vårjevndøgn). Genom att anpassa alla parametrarna är det möjligt att få värden på dom. Observera att för att få ett bra värde på  $T$  bör man göra mätningarna över flera år. Vi får med detta reda på både latituden ( $\lambda$ ) och jordaxelns lutning ( $\varphi$ ).

### **Solens rörelse på himlen – när står den som högst på himlen**

När man analyserat de dagligt upptagna solkurvorna, ser man även att  $t_{\max}$  varierar. Det vill säga att den lokala middagen inte inträffar på samma tidpunkt under året. Det första vi skall göra är att bestämma när den lokala middagen skall inträffa.

Innan det fanns tillförlitliga klockor och möjlighet att enkelt jämföra klockor i olika städer, använde man sig av lokal tid som oftast bestämdes utifrån den lokala middagen. För större noggrannhet använde man sig dock av stjärnorna. Med uppbyggnaden av järnvägsnätet blev det mer aktuellt att använda sig av en national standard tid som då jämfördes med den lokala tiden. Med detta kom man att internationellt att införa tidszoner. Det vill säga ett geografiskt område som använder sig av samma tid. Man utgår från nollmeridianen, som går genom Observatoriet i Greenwich, och låter ett område på  $\pm 7,5^\circ$  runt denna bilda tidszon noll. Övriga tidszoner centreras runt var  $15^\circ$  runt hela jorden, i alla fall så långt det går det vill säga i stort sett endast till havs. På land följer tidszonerna administrativa gränser, såsom gränser mellan länder, provinser, stater osv. I figur 8 visas standard tidszonerna på jorden.



**Figur 8 Standardtidszoner. Wikimedia commons public domain**

Detta medför att den tid som vi använder vanligen inte är den lokala tiden, dvs solen står inte som högst klockan 12.00. Korrektionen som vi skall använda får man genom att ta longituden för orten där du befinner dig och jämföra den med longituden för centrum av din tidszon.

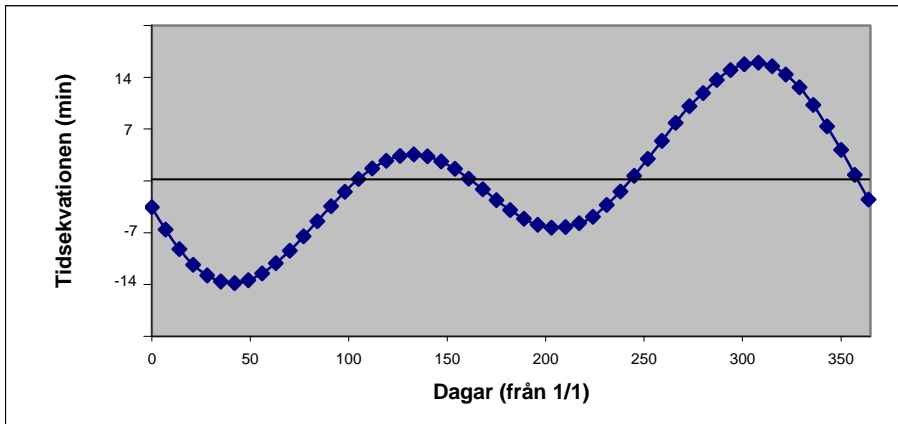
I Norge och Sverige är vår tidszon centrerad runt longituden  $15^{\circ}\text{E}$ , detta betyder att du skall ta longituden för din ort och subtrahera med  $15^{\circ}$ . Om du befinner dig i Trondheim (Longituden  $\lambda=10^{\circ}24'$  E, dvs 10 grader och 24 bågminuter öst, eller decimalt  $\lambda=10,4^{\circ}$  E) så får du en korrektion på  $-4,6^{\circ}$ . Detta innebär att den lokala middagen där inträffar efter 12.00. Mer exakt blir det:

$$t_{\text{korr}} = \frac{\lambda_{\text{korr}}}{15^{\circ}} \times 60 \text{ min} = \frac{4,6^{\circ}}{15^{\circ}} \times 60 \text{ min} = 18 \text{ min } 24 \text{ sek}$$

Det vill säga den lokala middagen i Trondheim inträffar ca: 12:18:24 (vintertid). Här måste man ta hänsyn till att vi har vinter och sommar tid, något som vi måste kompensera för i mätningarna.

När vi plottar  $t_{\text{max}}$  som funktion av datum ser vi att denna varierar med en avvikelse på maximalt runt  $\pm 15$  minuter och att den är noll för fyra dagar. För att förklara detta underlättar det om vi i stället för  $t_{\text{max}}$  använder beteckningen tidsekvationen (equation of time)  $E(t)$ . Det vill säga när middagen inträffar i förhållande till när den skulle inträffat. Inträffar den senare får vi ett negativt värde:

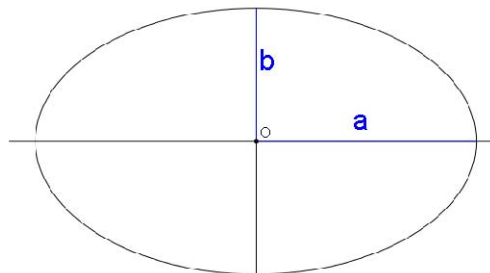
$$E(t) = T_{\text{solmax(longitud)}} - T_{\text{solmax(obs)}}$$



**Figur 9 Tidsekvationen från observationer för Trondheim.**

Tidsekvationen har sin förklaring i att längden hos ett soldygn inte är konstant under ett år. Ett soldygn skulle ha samma längd hela året om solen rörde sig på himmelsekvatorn och om den rörde sig med konstant vinkelhastighet. Detta är dock inte fallet då solen rör sig längs ekliptikan som bildar en vinkel mot himmelsekvatorn som är samma vinkel som jordaxelns lutning. Dessutom kommer Keplers andra lag ge att vinkelhastigheten varierar då avståndet mellan jorden och solen inte är konstant. Jordens bana runt solen bildar en ellips med en eccentricitet  $\varepsilon$ , vilket gör att när jorden befinner sig nära solen (i januari) kommer den att rör sig snabbare än när den befinner sig långt bort, vilket kommer att ge en variation i tidsekvationen.

Eccentriciteten hos en ellips definieras med hjälp av förhållandet mellan de två axlarna vi har,  $a$  och  $b$ .



Eccentriciteten definieras som:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Där en cirkel får eccentriciteten  $\varepsilon = 0$ .

Detta gör det möjligt att utifrån den upptagna tidsekvationen bestämma både jordaxelns lutning och eccentriciteten hos jordens bana runt solen. Det exakta utseendet hos tidsekvationen och härledningen av den är ganska komplicerade så jag väljer att presentera en god approximation för den istället:

$$E(t) = \frac{d}{2\pi} \left[ \frac{1 - \cos \varphi}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{T}(t - t_0)\right) - 2\varepsilon \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_1)\right) \right] \quad (1.4)$$

där  $d$  är längden på ett dygn (1440 min),  $\varphi$  jordaxelns lutning,  $T$  längden på ett år,  $t_0$  datum för vårdagjämningen (vårjevndøgn),  $\varepsilon$  eccentriciteten hos jordens bana runt solen och  $t_1$  datum då jorden befinner sig närmast solen (perihelion). Den första delen av ekvationen beror på jordaxelns lutning och den andra av jordbanans eccentricitet. Genom att anpassa kurvan till denna funktion kan de olika parametrarna bestämmas. Här kan man använda tabellerade värden eller egna värden i anpassningen.

Som ni sett så kan man använda ett enkelt solur till att bestämma ett antal parametrar.

- Längden på ett år  $T$  via (1.3) och (1.4)                      (365,26 dagar)
- Jordaxelns lutning  $\varphi$  via (1.3) och (1.4)                      (23,44°)
- Latituden  $\lambda$  via (1.3)
- Datum för vårdagjämningen  $t_0$  via (1.3) och (1.4)              (20 mars)
- eccentriciteten  $\varepsilon$  via (1.4)                                      (0,0167)
- Perihelion  $t_1$  via (1.4)    (3 jan)

Vilket är ganska imponerande för ett så enkelt instrument.

Från figur 9. ser vi även att solur har sin största missviselse under vårt vinterhalvår på norra halvklotet. Detta medför att solur på södra halvklotet kommer att avvika mer än dom gör på norra halvklotet under sommaren. Något som gör att solur inte är speciellt användbara på södra halvklotet och förekommer mer sparsamt där. Man kan bara spekulera hur astronomin utvecklats om det varit tvärtom.

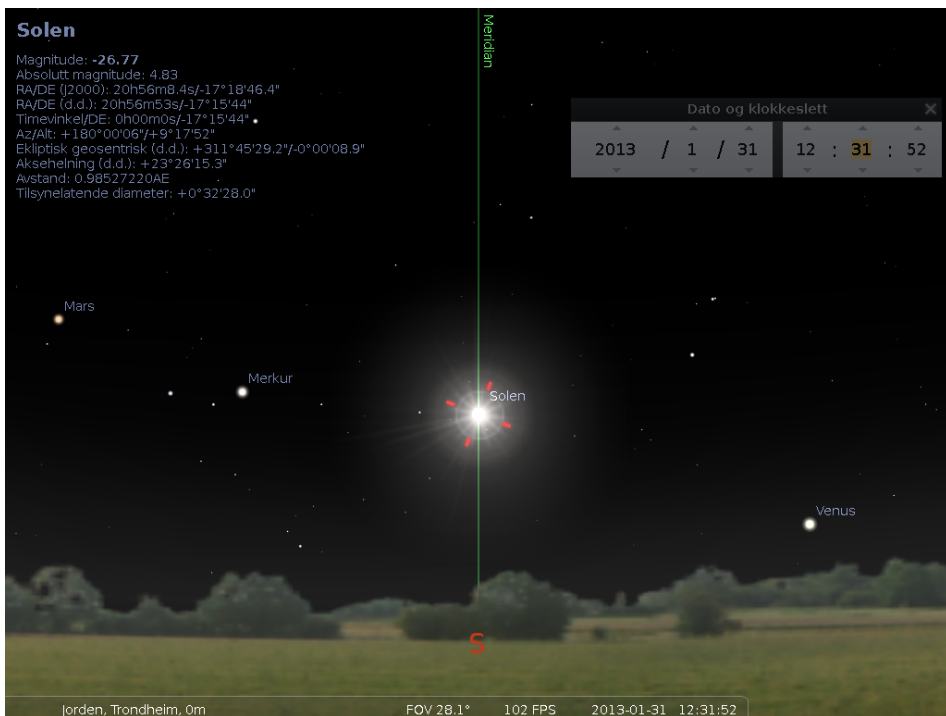
## Genvägar för den otålmodige

Som ni ser så krävs det mätningar varje vecka under ett år för att få bra värden, något som inte alltid låter sig göras enkelt. Men har man visat på principen och tagit ut ett antal solkurvor kan man istället använda sig av planetarieprogram för att ur dem bestämma solhöjden för olika tidpunkter under en dag, i första hand för att jämföra med den man fått fram genom mätningar. Detta gör att man snabbt kan få fram semi-experimentella kurvor. Men i planetarieprogram kan vi utan problem ändra datum och få fram data för ett helt år.

Vill man fortsätta och göra det enkelt för sig kan man på ett enkelt sätt bestämma både  $\theta_{\max}$  och  $t_{\max}$  direkt i planetarieprogrammen. Solen kommer att befinna sig på sin högsta punkt då den står rakt i söder, med andra ord, när den befinner sig på himmelsmedianen där dess timvinkel är 00h00m0s. Kan man hitta denna positionen är det lätt att läsa av solhöjden och tidpunkten. Hur man gör detta beror på vilket planetarieprogram som man har. Det program som jag rekommenderar är Stellarium (open-source).

I Stellarium stället man sig i närheten av den lokala middagen, och markerar solen. Nu kommer information om solen att dyka upp till vänster på skärmen. Se figur 10. Här är det en fördel om man inte har någon atmosfär vilket man ordnar i inställningarna. Den information som vi söker står på femte raden: Timvinkel/DE: 0h00m0s/-17°15'44" (i figur 10), timvinkeln är det första värdet. Tiden läser man av på vanligt sätt och solhöjden är Alt(ituden) som står på sjätte raden: Az/Alt.: +180°00'06"/+9°17'52" (i figuren). Tänk på att vinkelmåtten ges i bågminuter och bågsekunder,  $1^\circ = 60'$  (bågminuter) =  $60 \cdot 60''$  (bågsekunder).

Med detta är det inga större problem att skaffa fram data för att analysera enligt procedurerna beskriven ovan.



**Figur 10** Måtnng av solhøjd og tid i Stellarium

Det er væl vært att observera att Stellarium och andra planetarieprogram råkner ut positionerna, så det är inte riktigt samma sak som en riktig måtnng.

## **Solens storlek och jordbanans eccentricitet**

Solen är det mest framträdande objektet på himlen och det som ger oss både ljus och värme. Den storlek som solen har på himlen är cirka en halv grad, något som motsvarar tummen när man sträcker ut armen. Men är solen lika stor hela året? Kan vi använda solens storlek under året till att bestämma jordbanans eccentricitet?

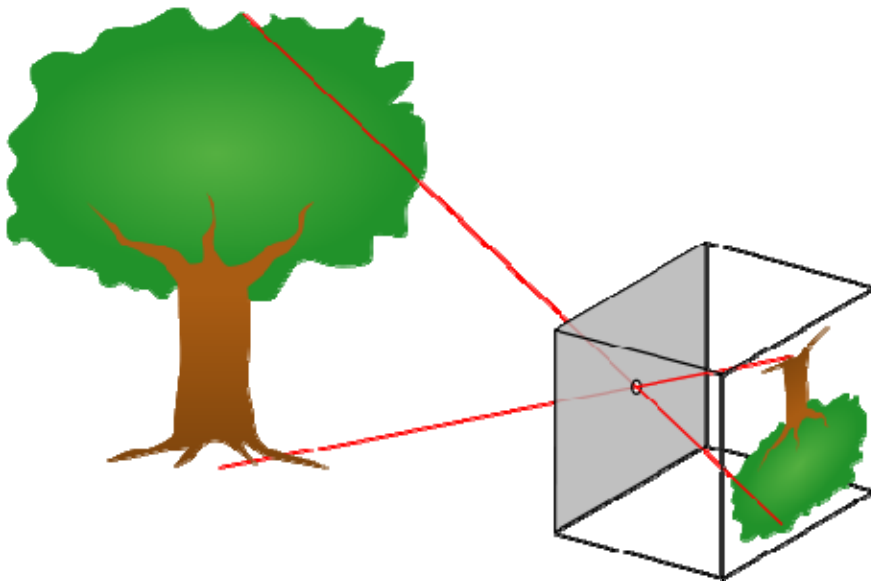
### **Solens storlek - mätning**

Dom flesta har upplevt att solen ser större ut vid upp- eller nedgång. Att detta är en illusion som är lätt att visa.

Det enklaste vore att direkt jämföra med en rund skiva och en linjal som man håller framför sig. Men detta är inte lämpligt att göra. Solen är såpass stark att man aldrig skall titta mot den med obeskyddade ögon. Inte ens med solglasögon skall man göra detta, utan det krävs speciella solförmörkelsesglasögon för att detta skall vara säkert.

Det man kan göra är att använda sig av projektion, man använder sig av en lins eller spegel och projicera en bild av solen på ett papper. Det är då möjligt att skissa av solskivan och mäta storleken. Genom att göra detta flera gånger under dagen kan man då se att solen inte ändrar storlek. Man kan även sätta solförmörkelsesglasögon framför en kamera och ta en bild.

Vi får med detta en relativ mätning då linsen/linserna påverkar storleken. För att få en direkt mätning kan man istället använda sig av ett pinhål. Där storleken på solskivan på en skärm och avståndet mellan skärmen och pinhållet ger storleken på solen i grader eller radianer.



**Figur 11 Princip för en pinhål-kamera. Wikimedia commons public domain**

Mätningarna som man gör bör upprepas ett antal gånger för att få ett så bra värde som möjligt.

### **Solens storlek – variation under året**

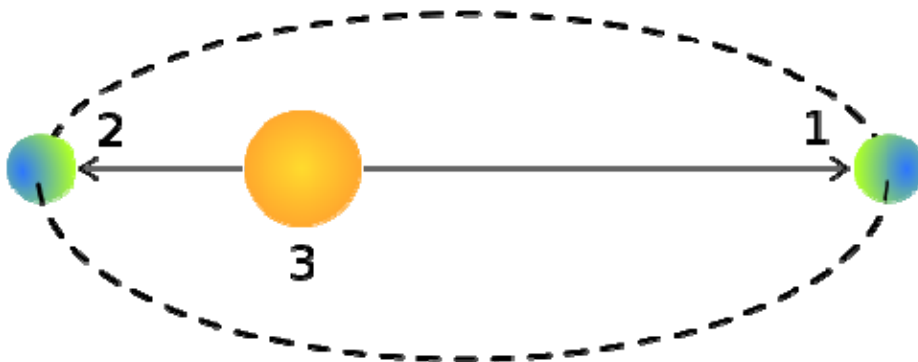
Metoden med ett pinhål kan man nu utnyttja och bestämma solens storlek under ett år, för att se om det är en variation. Då den variation i storlek ligger runt 3,5% är det svårt att få tillräcklig noggrannhet med denna metoden. Så vi behöver ett alternativ.

Det finns runt hela jorden ett antal observatorier som dagligen tar bilder av solen. Fördelen med dessa bilder är att teleskopen är fast inställda så om solen varierar i storlek så ser vi detta på bilderna genom att solskivan inte är lika stor. Bilderna som finns fritt tillgängliga kan lastas ner och analyseras i ett vanligt fotoediteringsprogram där man kan mäta avstånd i bilden. Vi får då ett mått på storleken och kan jämföra med andra bilder tagna med samma teleskop.

Bilderna kan laddas ner från <http://gong2.nso.edu/dailyimages/> där man kan välja ut ett teleskop och gå igenom bildarkiven. Här behöver man bara ta en bild var eller varannan vecka. Det är speciellt viktigt att man får tag på bilder vid aphelion och perihelion, dvs när solen är som längst bort och när den är som närmast, detta inträffar runt 5 juli respektive 5 januari.



Man kan plotta resultaten för att se när solen är som störst respektive minst. Överraskande för många visar det sig att solen är som störst i januari. Många tror att det blir sommar för att solen är nära jorden.



Figur 12 Demonstration av aphelion (1) och perihelion (2) för en planet. *Wikimedia commons public domain*

Om vi tittar vid aphelion och perihelion, ser vi att förhållandet för storleken blir ca: 1,035. Detta förhållande kan vi använda för att bestämma jordbanans eccentricitet. Jordbanan är som vi vet från Keplers andra lag en ellips. Det vill säga att vi kan utnyttja egenskaperna för en ellips och bestämma eccentriciteten från detta förhållande. Förhållandet är kvoten mellan solens största storlek och den minsta storleken, samtidigt är det kvoten mellan den största avståndet från ellipsen till fokus ( där solen är placerad) och det minsta avståndet:

$$\alpha = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}}$$

Men samtidigt kan vi definiera eccentriciteten med dessa avstånd:

$$\varepsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Vilket med ett förhållande  $\alpha = 1,035$  ger eccentriciteten  $\varepsilon = 0.017$  att jämföra med det tabellerade värdet  $\varepsilon = 0.0167$ .

Vi kan även jämföra med avstånden vid perihelion och aphelion, 147056800 km och 152143200 km. Vilket ger  $\alpha = 1,03459$ .

## **Genvägar för den otålmodige**

Vill man nu inte använda sig av en analys av bilder så finns ett alternativ i planetarieprogram där man kan läsa av solens uppfattade storlek (diameter i grader) direkt.



är troligare att Eratostenes använde sig av en Egyptisk stadion, vilken är ca: 157.5 m, som ger en omkrets på 39690 km, ett fel på under 2 %!  
Tittar vi på det moderna avståndet mellan Alexandria och Aswan (842 km) får vi en omkrets på 42120 km.

### **Egna mätningar**

Även om matematiken är enkel så är själva experimentet svårare att genomföra rent praktiskt. Detta beroende på att man behöver mäta solhöjden vid lokala middagen på två ställen samtidigt. Skall man göra försöket riktigt (som Eratostenes) behöver dessa befinna sig på samma longitud, och vi behöver veta avståndet mellan dom. Observera att detta är avståndet nord-syd och inte avståndet som vi ser på vägskyltar. Man kan dock använda sig av en kartbok.

Men om man tänker efter lite så behöver vi bara veta nord-syd avståndet mellan latituderna, så länge som man gör mätningen vid den lokala middagen. Detta gör uppgiften mycket enklare. Det enda man behöver då är en annan skola som gör samma försök på samma dag.

Här kan man utveckla försöket ytterligare. Mätningen vi gör kan översättas till hur många km det är mellan olika latituder. Då vi vet att jorden inte är helt rund utan lite tillplattad (sammentryckt) vid polerna, något som gör det möjligt, om man mäter noggrant, att se om antalet km mellan ex. 5° latitudmässigt ändrar sig när man närmar sig polerna. För att göra detta måste man ha samarbetsskolor runt hela jorden.

### **Genvägar för den otålmodige**

Det finns som alltid ett alternativ och man kan använda sig av ett planetarieprogram, där man då läser av solhöjden vid lokal middag, för olika latituder.

## **Månens avstånd och storlek**

Aristarchos från Samos, född omkring 310 fKr, död 230 fKr, var en grekisk astronom och matematiker som la fram den första kända heliocentriska världsbilden. Han använde sig av geometri och observationer för att bestämma den relativa storleken på månen (i förhållande till jorden) och det relativa avståndet mellan jorden och månen. Vi skall i nästa kapitel se att han gjorde samma sak för solen.

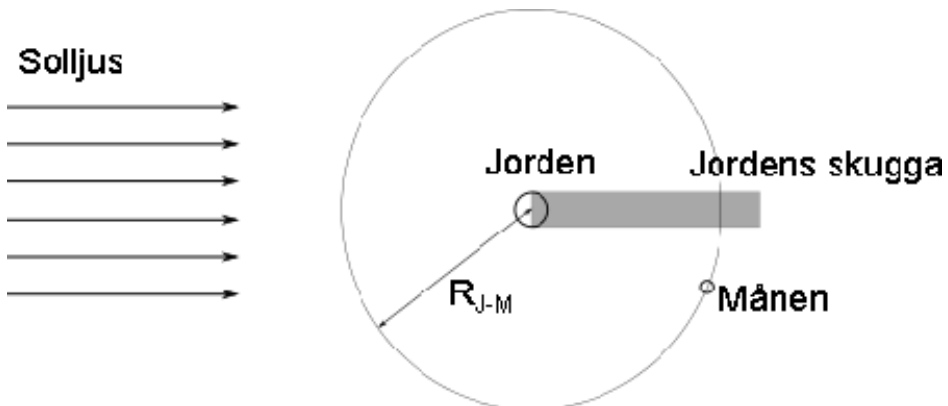
När Aristarchos verkade fanns det inte någon mätning av jordens storlek, detta gjorde Eratostenes efter Aristarchos död. Dessutom fanns det heller inte några noggranna mätinstrument så Aristarchos mätningar (observationer) hade inte en bättre upplösning på maximalt  $1^\circ$ . För att ytterligare komplicera det hela så finns det svårigheter i att tolka vad Aristarchos använde för enheter. Detta i kombination med felaktiga värden så är resultatet som han fick för små, men hans resonemang var korrekta och med rätt observerbara värden får man ett bra resultat.

### **Bestämning av avståndet till månen**

Genom att observera en månförmörkelse får man inte bara reda på jordens form utan det går även att bestämma avståndet till månen. Observera att vi måste veta hur länge en månförmörkelse varar.

### **Förenklad metod**

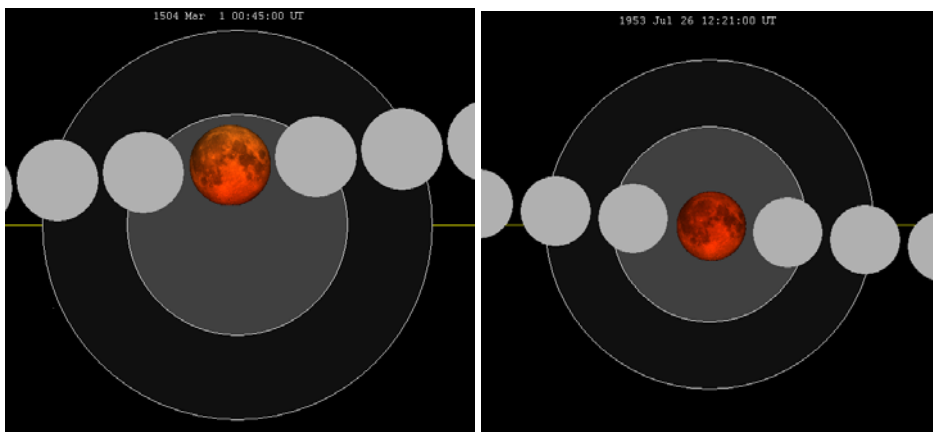
Vi börjar med en förenklad bild och antar att solen befinner sig oändligt långt bort. I det fallet kommer ljuset från solen att komma in parallellt.



Figur 14 Aristarchos förenklade modell

Detta gör att kärnskuggan (umbra) kommer att vara lika stor överallt, med en cylindrisk skugga. Använder vi detta antagandet kommer vi få ett värde på månens storlek och avstånd som är för stort. Vi skall titta närmare på detta senare.

Det vi behöver bestämma är förhållandet mellan månen och jordens kärnskugga. Något man kan göra genom att observera hur lång tid en månförmörkelse tar. För att göra detta måste vi dessutom känna till månens omloppstid runt jorden (27.321582 dygn). Här måste man även kunna ta hänsyn till att månens centrum och skuggans centrum inte sammanfaller i alla månförmörkelser. Vilket gör att en månförmörkelse tar kortare tid än väntat. Månförmörkelserna, 16 jul 2000 och 26 jun 2026 är dom som passar bäst då månens och kärnskuggans centra sammanfaller.



Figur 15 a) Månförmörkelse där centra inte sammanfaller. b) Månförmörkelse där centra sammanfaller.

Dessa kan man studera i ett planetarieprogram som gör det möjligt att få en god bestämning av längden på månförmörkelsen. Här är det viktigt att man använder sig av rätt tider. Det enklaste är att starta tidtagningen när månen kommer in i kärnskuggan (U2) och stoppa den när den lämnar kärnskuggan totalt (U4). Använder man tidpunkten när månen börjar lämna kärnskuggan (U3) kommer man göra en fel mätning då det är en måndiameter kvar innan den har lämnat kärnskuggan.

Använder vi U2 och U4 så tar det ca: 72 min för månen att passera hela kärnskuggan. Då vi vet att det tar 27.322 dygn för månen att gå ett varv (360°) runt jorden så kan vi få fram vinkelstorleken på kärnskuggan:

$$\varphi_{umbra} = \frac{T_{U2-U4}}{T_{period}} \times 360^\circ = \frac{172}{27,322 \times 24 \times 60} \times 360^\circ = 1,5738^\circ$$

Med andra ord, i vår förenklade modell, där månen befinner sig har jordskuggan en längd på en jorddiameter och tar upp 1,5738°, Vi har alltså en längd och två vinklar. Avståndet mellan månen och jorden blir då:

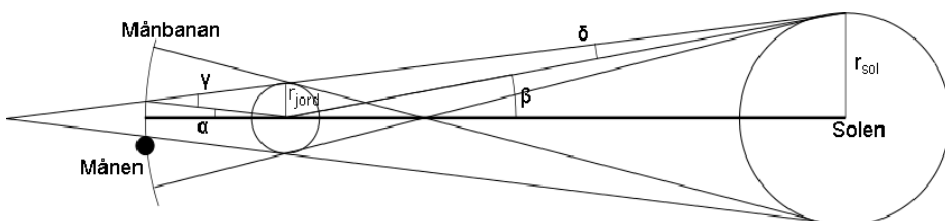
$$R_{J-M} = \frac{d_{jord}}{\tan \varphi_{umbra}} = 36,4 \cdot d_{jord} = 72,8 \cdot r_{jord}$$

och kan bestämma avståndet till månen uttryckt i jordradier. Men här har vi gjort antagandet att solen befinner sig långt borta och jordskuggan har samma storlek som jorden. Detta är inte sant utan vi måste ta hänsyn till det ändliga avståndet till solen.

## Avancerad modell

Vi vet dock att solen inte befinner sig oändligt långt bort, detta ser vi genom att solen inte är en punkt på himlen och att skuggorna inte är helt skarpt begränsade. Detta medför att skuggan av jorden är mindre än jorden på det avstånd som månen befinner sig. För att kunna få en bättre uppskattning måste vi titta närmare på problemet.

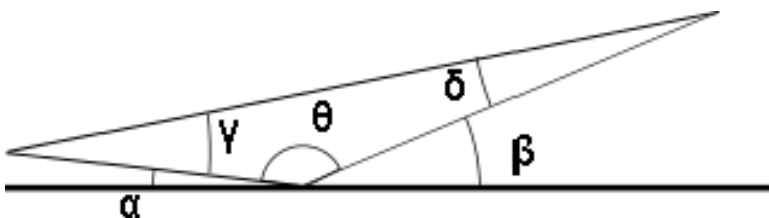
Figur 16 visar hur det ser ut principiellt, här har avstånden ändrats för att göra det tydligare.



Figur 16 Aristarchos avancerade modell

Vinkeln  $\alpha$  i figur 16 är radien på kärnskuggan, vid månens bana. Vinkel  $\beta$  är vinkelstorleken på solens radie sett från jorden. Vinkel  $\gamma$  är jordradiens vinkelstorlek sett från månen och vinkel  $\delta$  är jordradiens vinkelstorlek sett från solen.

Vi tittar mer noggrannt på detta i figur 17.



Figur 17 Aristarchos avancerade modell. Vinklar.

Här ser vi att vinklarna förhåller sig till varandra genom:

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \quad (1.5)$$

Genom att vinkeln  $\theta$  minus  $180^\circ$  är  $\alpha + \beta$  samt  $\gamma + \delta$ . Om vi i tillägg konstaterar att månen och solen ser lika stora ut på himlen, något vi ser vid en total solförmörkelse, får vi att vinkel  $\beta$  är lika stor som månens



vinkelradie ( $r_m$ ). Dessutom så ser man att solen befinner sig mycket längre bort än månen, detta genom att nymånen bilda en vinkel på nästan  $90^\circ$ , så man kan sätta att:

$$\delta \ll \gamma$$

Vilket i sin tur ger:

$$\gamma = r_m + \alpha = r_m \left( 1 + \frac{\alpha}{r_m} \right) \quad (1.6)$$

Men  $\gamma$  relateras till jordens radie och avståndet mellan jorden och månen:

$$\sin \gamma = \frac{r_{jord}}{R_{J-M}}$$

$$R_{J-M} = \frac{r_{jord}}{\sin \left( r_m \left( 1 + \frac{\alpha}{r_m} \right) \right)}$$

Vi känner dock till sedan tidigare att  $\alpha = \varphi_{umbra} / 2 = 1,5738^\circ / 2 = 0,7869^\circ$  och vi har ett värde på månens vinkelradie ( $0,25^\circ$ ) Vilket då gör det möjligt att bestämma avståndet mellan jorden och månen, med den mätning vi har sedan tidigare:

$$R_{J-M} = \frac{r_{jord}}{\sin \left( 0,25^\circ \left( 1 + \frac{0,7869^\circ}{0,25^\circ} \right) \right)} = 55,26 \cdot r_{jord}$$

Detta skall jämföras med värdet vi fick för den förenklade modellen  $72,8 r_{jord}$ , och det uppmätta verkliga avståndet  $61,6 r_{jord}$ . Så denna metod ger ett acceptabelt värde.

## Månbanans eccentricitet

Månen rör sig i en elliptisk bana runt jorden, på samma sätt som jorden runt solen. Detta gör att månen kommer att variera i sin storlek på himlen. Då månen uppvisar faser kan det vara svårt att bestämma månens diameter på himlen genom observationer. Här kan man nu utnyttja planetarieprogram där man kan få upp den information som man söker direkt. Alternativet är att ta bilder av (full-)månen med en kamera med fast brännvidd, för att sedan jämföra bilderna.



Figur 18 Skärmbild från Stellarium med månen och data.

Förutom storleken på himlen (apparent diameter) får vi även reda på avståndet. Men då målet är att göra uppgiften så experimentell som möjligt handlar det om att bestämma månens diameter och hur den varierar. Det som man helst vill är att få mätningar då månen befinner sig så nära jorden som möjligt (perigee) och när den är så långt bort som möjligt (apogee). Detta varierar under året och det är inte möjligt att sätta ett specifikt datum för detta som vi kunde för solen. I stället kan man använda sig av en "Lunar Perigee and Apogee Calculator"

[\[http://www.fourmilab.ch/earthview/pacalc.html\]](http://www.fourmilab.ch/earthview/pacalc.html) och se vilka dagar som är bäst att välja.

Har man datum kan man gå till ett planetarieprogram och i det få månens diameter ( $\beta$ ) i grader eller bågminuter. Tittar vi vid apigee och perigee, ser vi att förhållandet för storleken blir ca: 1,13. Detta förhållande kan vi använda för att bestämma månbanans eccentricitet. Vi vet att den är en ellips och vi utnyttjar dess egenskaper för att bestämma eccentriciteten från detta förhållande. Förhållandet är kvoten mellan månens största och minsta storlek, samtidigt är det kvoten mellan den största avståndet från ellipsen till fokus ( där jorden är placerad) och det minsta avståndet:

$$\alpha = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}}$$

Men samtidigt kan vi definiera eccentriciteten med avstånden:

$$\varepsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Vilket med ett förhållande  $\alpha = 1,13$  ger eccentriciteten  $\varepsilon = 0.061$  att jämföra med det tabellerade värdet  $\varepsilon = 0.0549$ .

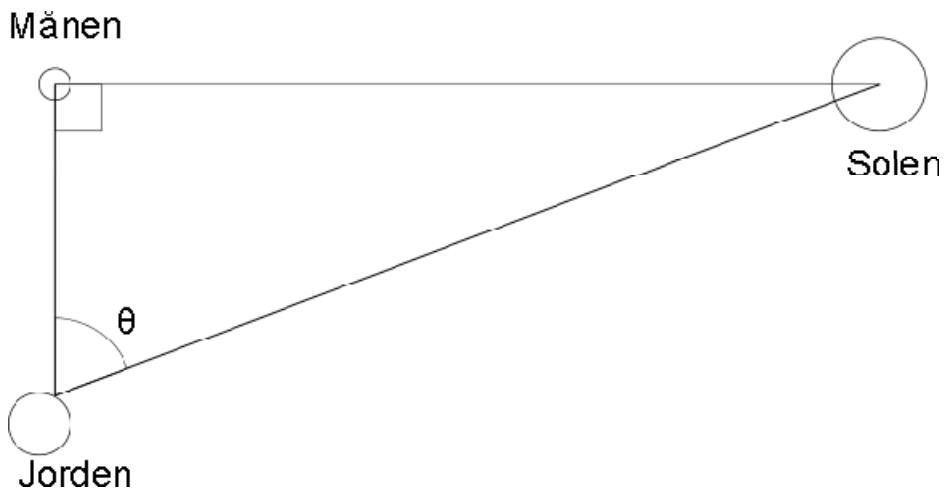
Observera att det tabellerade värdet är beräknat från jordens och månens centra, vilket gör att vårt värde är större om vi inte korrigerar för detta.



## Avståndet till solen

Aristarchos kom på ett relativt enkelt sätt att bestämma det relativa avståndet till solen jämfört med avståndet till månen. Ett förhållande som vi idag vet är cirka 400. Aristarchos tog utgångspunkt i att om halva månen är belyst så innebär det att vinkeln mellan jorden-månen-solen är  $90^\circ$ . Detta gör att vinkeln mellan månen-jorden-solen ( $\theta$ ) förhåller sig till avståndet mellan jorden och månen samt månen och solen.

$$\cos \theta = \frac{R_{\text{måne}}}{R_{\text{sol}}}$$



Figur 19 Aristarchos bestämning av avståndet till solen.

På pappret ser detta ut att vara en enkel uppgift att genomföra. Men det finns ett antal problem som gör detta till en utmaning att genomföra till och med idag. Aristarchos uppskattade vinkeln till ca:  $87^\circ$ , dvs solen befinner sig ca 20 gånger längre bort än månen.

### När är månen halv?

Den första utmaningen är att kunna bestämma när månen är halv, dvs exakt när halva månen är belyst av solen. Man kan själv försöka se när månen är halv, men detta är ganska svårt att få till på ett bra sätt. Alternativet är att använda planetarieprogram, men även här är det svårt att avgöra exakt när

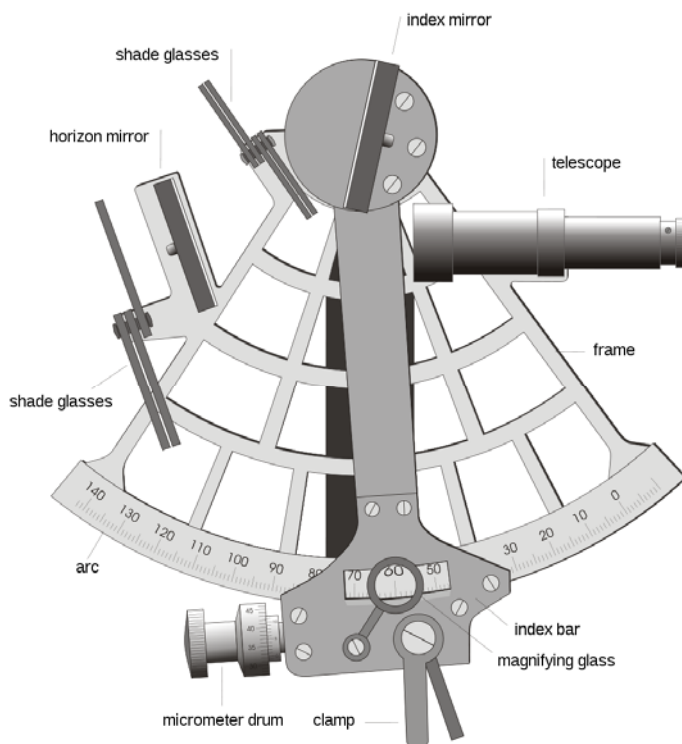
månen är halv. Man kan gå till en astronomisk kalender och slå upp när första eller tredje kvartalen (first or third quarter) inträffar. Dessa finns dessutom på webben:

<http://www.timeanddate.com/calendar/moonphases.html?year=2013&n=0>

Här får man då en tidpunkt som definieras från att vinkeln mellan jordens, månens och solens centra är  $90^\circ$ .

### Hur mäta vinkeln mellan solen och månen?

I princip är det lätt att mäta vinklar mellan objekt på himlen. Men här så kommet vi att behöva göra mätningar med en noggrannhet på bågminuter ( $1/60$  grad). Detta gör att vi måste använda precisionsinstrument som exempelvis en sextant. Även om detta instrument främst används för att bestämma solhöjden vid navigation fungerar den utmärkt att mäta vinklar mellan objekt på himlen. Då sextanten är designad att användas för observationer av solhöjden finns solfilter redan installerade på sextanten.

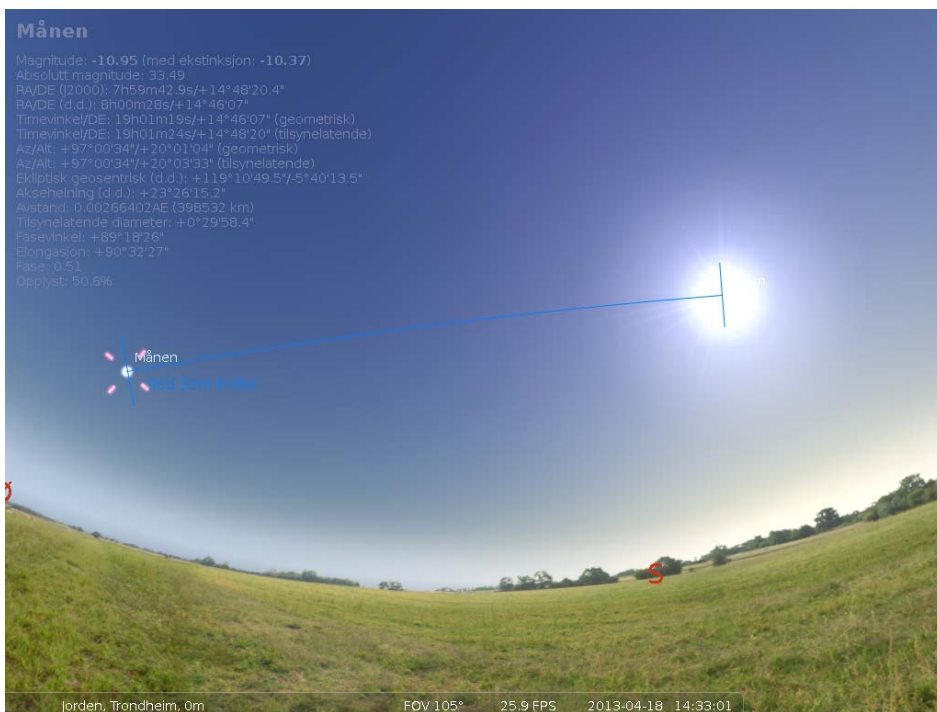


**Figur 20 Sextant.** Joaquim Alves Gaspar Wikimedia Commons/Creative Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Tyvär så är inte sextanter så vanliga idag, så det kan vara problematiskt att få tag på ett väl fungerande instrument. I tillägg så tar det tid att lära sig att använda instrumentet på bästa sätt.

Vi har dock möjlighet att använda oss av planetarieprogram för mätningen. En del program har en inbyggd vinkelmätning som underlättar det hela. Det andra alternativet som finns är att använda positionerna på månen och solen på himlen och räkna ut vinkeln från dessa. Detta kräver dock kunskaper i sfärisk geometri.

I programmet som jag använder, Stellarium, finns vinkelmätning som en plug-in. När denna aktiveras kan man markera ett avstånd genom att klicka och dra. Då man måste vara noggrann behöver man kunna navigera med tangentbordet utan att släppa musknappen (detta gäller för nuvarande version av Stellarium, men detta kan komma att ändras.).



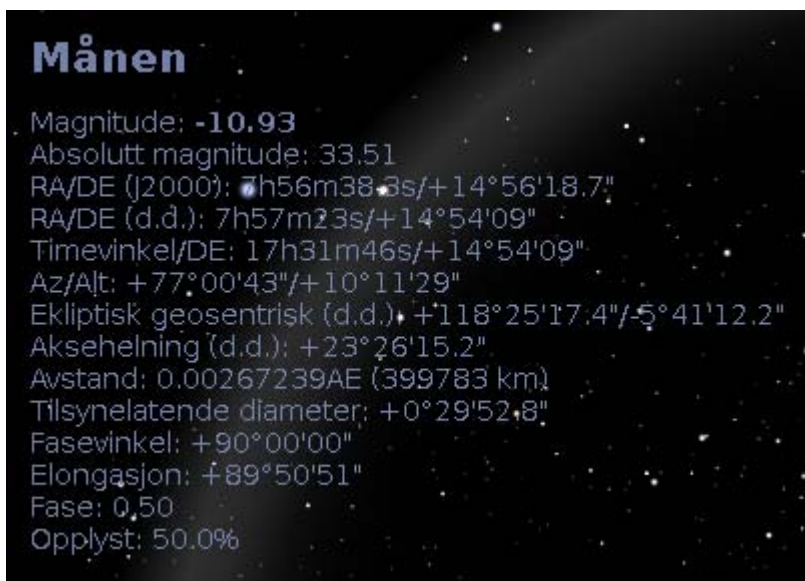
**Figur 21** Skärmbild av stellarium med mätning av vinkelavståndet mellan månen och solen, 18 april 2013, 14:33, Första kvartalet.

Genom att välja ett lämpligt datum kan man nu göra mätningen vid första eller tredje kvartalet, enligt den astronomiska kalendern.

Mätningen i figur 21, är gjord den 18 april 2013, kl 14:33 lokal tid. Resultatet blir en vinkel på  $90^{\circ} 32' 08''$ ! En vinkel på över  $90^{\circ}$ !! Något som inte stämmer med vad vi förväntar oss.

Detta är dock inte något mätfel utan det beror på att första (och tredje) kvartalet är definierat från jordens centrum. Men observationen gjordes på jordytan vid en speciell longitud och latitud. Det vill säga att vi inte nödvändigtvis har en lokal halvmåne vid denna tidpunkten. Det vi söker är den topocentriska halvmånen. Något som inte är så enkelt att beräkna dessutom finns det inte många program där det är möjligt att få fram denna informationen.

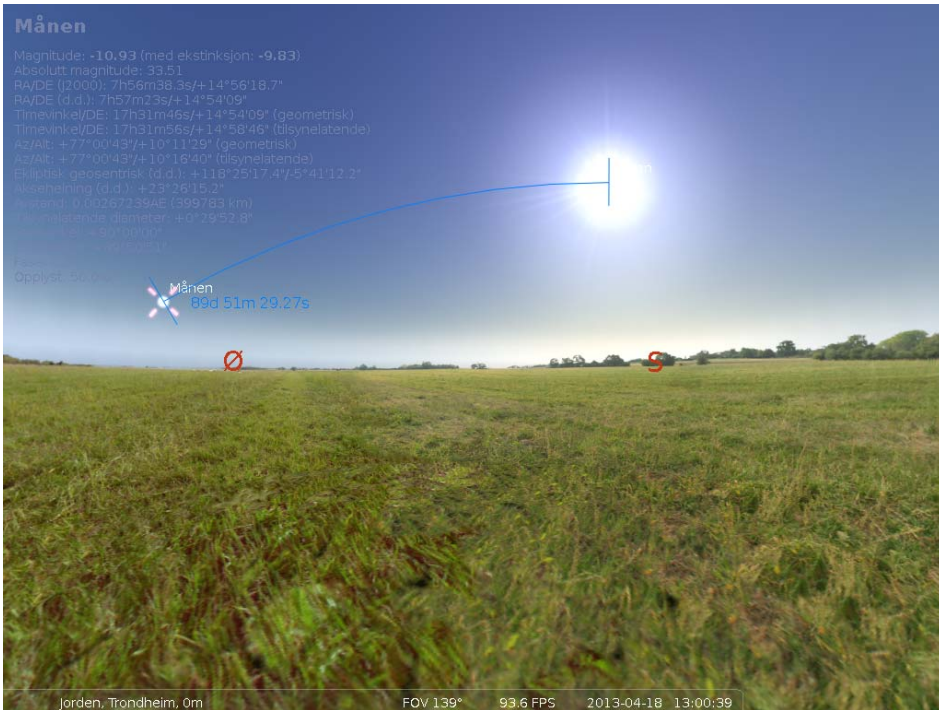
För att komma undan detta använder vi oss av den information som finns att hitta i Stellarium. När vi markerat månen, kommer vi att se en massa information om den (figur 22). Den information som vi vill ha nu är Fasvinkel. Detta är ett mått på fasen det vill säga att när den är  $90^{\circ}$  så har vi lokal halvmåne. Detta ser vi även på Fas och hur stor del av månen som är upplyst. I Figur 21 ser vi att fasvinkeln inte är  $90^{\circ}$  vid den tidpunkt är första kvartalet.



Figur 22 Skärmbild från Stellarium. Information om månen.

Genom att leta sig fram till den tidpunkt då fasvinkeln är  $90^{\circ}$  har man tidpunkten för den lokala halvmånen och kan gå ut och mäta med en sextant. Alternativet är att göra vinkelmätningen i Stellarium.





**Figur 23** Skärmbild av stellarium med mätning av vinkelavståndet mellan månen och solen, 18 april 2013, 13:00, Fasvinkel 90°.

För den aktuella tidpunkten (13:00) fick jag en vinkel på 89°51'30"  
 (=89,86°). Omräknat med

$$\cos \theta = \frac{R_{måne}}{R_{sol}}$$

innebär detta att avståndet till solen  $R_{sol} = 409 R_{måne}$ . I god överensstämmelse med tabellerade värden. Det är nu även möjligt att byta plats och se om man kan få bättre värden.

## Erfarenheter

Från detta har vi lärt oss en hel del.

- Det är viktigt att man mäter rätt saker vid rätt tidpunkt. Som ni har sett så är det mycket viktigt att mäta vid tidpunkt för att få ett bra resultat.
- Mätningarna som behöver göras i detta fallet måste vara precisa för att få ett bra resultat, en liten fel mätning kan ge stora fel senare.
- Trots att ideen som Aristarchos hade var enkel så visar det sig att det är svårt att göra denna mätning i praktiken. Det var omöjligt för

Vi ser här att även om det ser ut att vara ett enkelt försök så är det ganska svårt att få till det på ett bra sätt. Det är tack vare planetarieprogram som det blir lätt att genomföra dessa mätningar. I tillägg behöver vi inte vänta in halvmånen eller hoppas på bra väder.

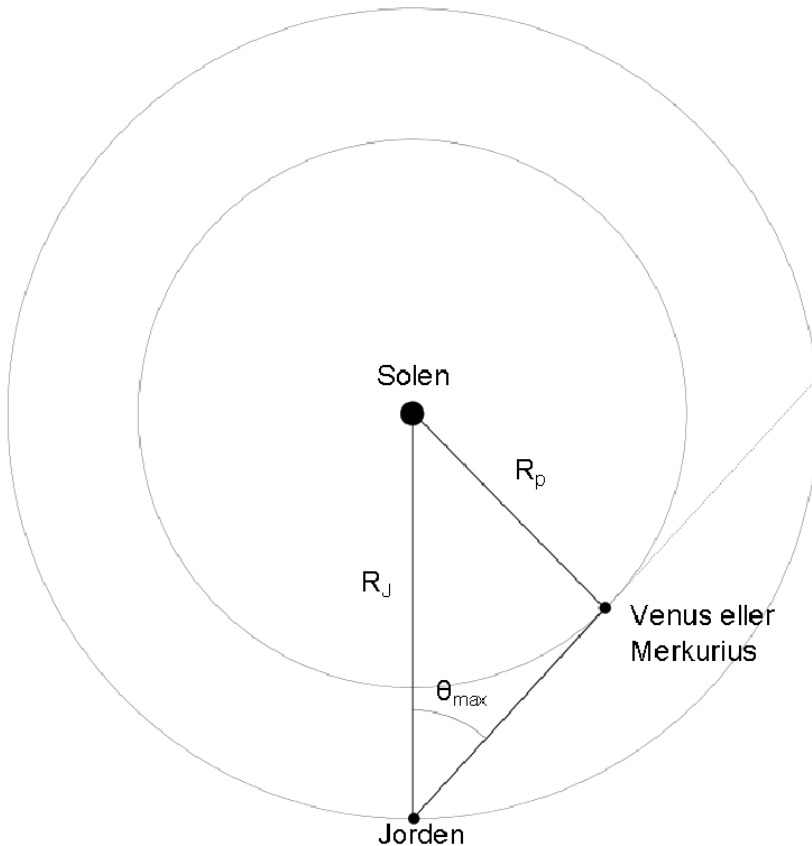
## En övning i geometri – de inre planeternas banradier

Planeternas rörelse över himlen beskriver en ganska komplicerad rörelse över himlen. Något som bidrog till utvecklandet av den geocentriska världsbilden. I dag har vi en helocentrisk bild av solsystemet som beskriver det på ett relativt lätt och överskådligt sätt. Vi kan nu utnyttja en heliocentrisk bild kombinerat med observationer, egna eller i planetarieprogram och bestämma banradierna för de inre planeterna, Venus och Merkurius.

För att göra detta på ett enkelt sätt måste vi anta vissa saker, dessa antaganden gör vi för att det skall bli lättare att göra beräkningarna.

- Planeterna rör sig i ekliptikans plan.
- Banorna är cirkulära.
- Banhastigheten är konstant.

Det vi skall titta på är vinkelavståndet mellan solen och en inre planet sett från jorden. I figur 24, ser vi att vi får ett största vinkelavstånd mellan solen och planeten då vinkeln mellan solen-planeten-jorden blir  $90^\circ$ , eller då siktlinjen från jorden bildar tangenten till planetens bana. Vi kommer då få en situation där vinkeln mellan planeten och solen kommer att vara som störst. Detta kallas elongation. Detta är något vi observerar när Venus och Merkurius syns som bäst. Sker detta på kvällen efter solnedgången är den nära sin största östliga elongation, och när den syns bäst på morgonen före soluppgången är den nära sin största västliga elongation.



**Figur 24 Schematisk bild av banan för en inre planet.**

I den största elongationen kommer vi då kunna få fram förhållandet mellan jordens och den inre planetens banradier:

$$\sin \theta_{\max} = \frac{R_p}{R_J} \rightarrow R_p = R_J \sin \theta_{\max}$$

Kan vi nu bestämma det största vinkelavståndet mellan solen och de inre planeterna så får vi deras banradier i förhållande till jordens banradie.

Dessa kan vi bestämma genom observationer (egna eller i Stellarium) eller så letar man upp värdena på annat sätt.

Den största elongationen för Mercurius är mellan  $18^\circ$  och  $28^\circ$ , och för Venus mellan  $45^\circ$  och  $47^\circ$ . Dessa värden varierar huvudsakligen därför att planetbanorna är ellipser och inte cirklar. Mercurius bana avviker betydligt

mer från cirkelformen än Venus bana med en eccentricitet på 0.20, därför är variationen i Merkurius största elongation större.

Vi kan trots detta använda oss av dessa värden. Om vi tar Venus först finner vi att vi får banradierna:

Elongation	$R_p$
45°	0,707 $R_J$
47°	0,731 $R_J$

Vilket stämmer väl med det tabellerade värdet på ca: 0,723  $R_J$ .

För Merkurius får vi:

Elongation	$R_p$
18°	0,309 $R_J$
28°	0,469 $R_J$

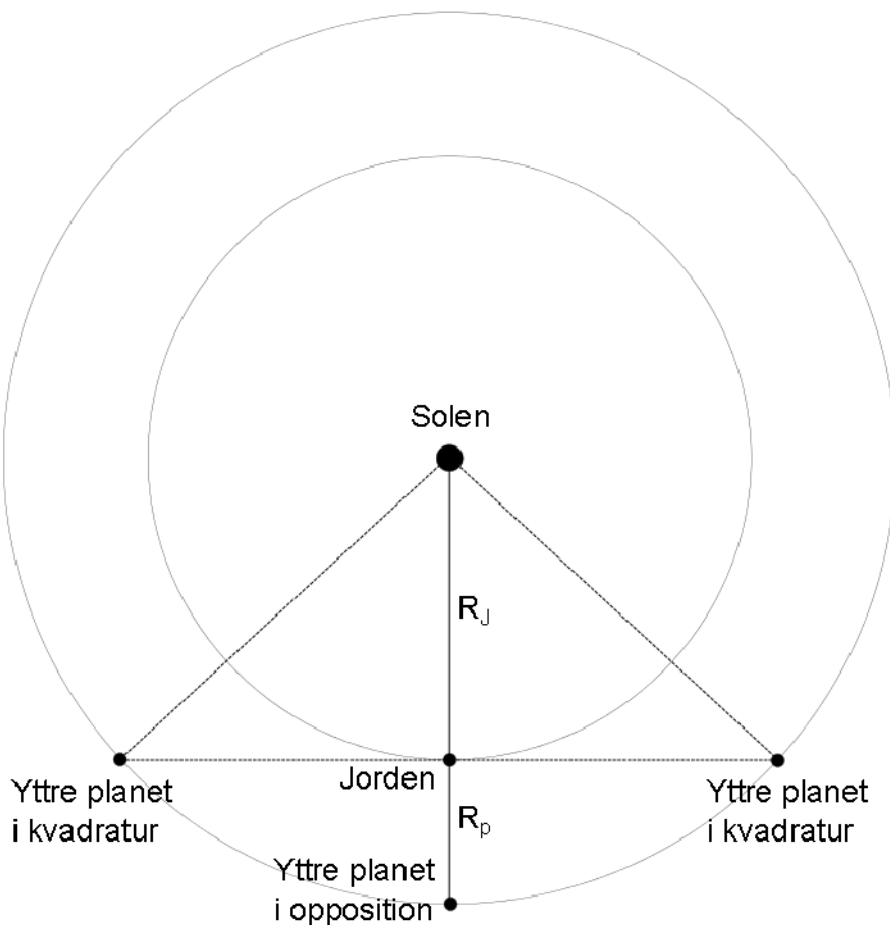
Även dessa värden har samma storleksordning som Merkurius perihelion (kortaste avstånd till solen) 0,307  $R_J$  och aphelion (största avstånd till solen) 0,467  $R_J$ . Med våra beräknade värden kan vi även bestämma eccentriciteten.

Vi kommer inte få exakta värden då vår observationsplats (jorden) har en eccentricitet och vi har försummat påverkan av banernas lutning mot ekliptikan. Men övningen visar att det är relativt enkelt att få reda på ganska mycket information med enkla medel.



## En övning i geometri – de yttre planeternas banradier

Om det är relativt enkelt att bestämma de inre planeternas banradier så blir det besvärligare att göra det samma för de yttre planeterna. Här kommer vi inte att ha en maximal elongation, utan planeten kan befinna sig  $180^\circ$  från solen i en så kallad opposition, dvs vi har en rät linje från solen genom jorden och till den yttre planeten. Se figur 25. Vi ser här att vi får två punkter då vinkeln mellan solen och den yttre planeten är  $90^\circ$ , något som kallas kvadratur.



Figur 25 Yttre planet i opposition och i kvadratur

Vi ser att när planeten är i kvadraturen så är vinkeln mellan solen och planeten  $90^\circ$ , dvs att från planeten så kommer vinkeln mellan solen och jorden ( $\theta$ ) att förhålla sig till kvoten mellan jordens och planetens banradie:

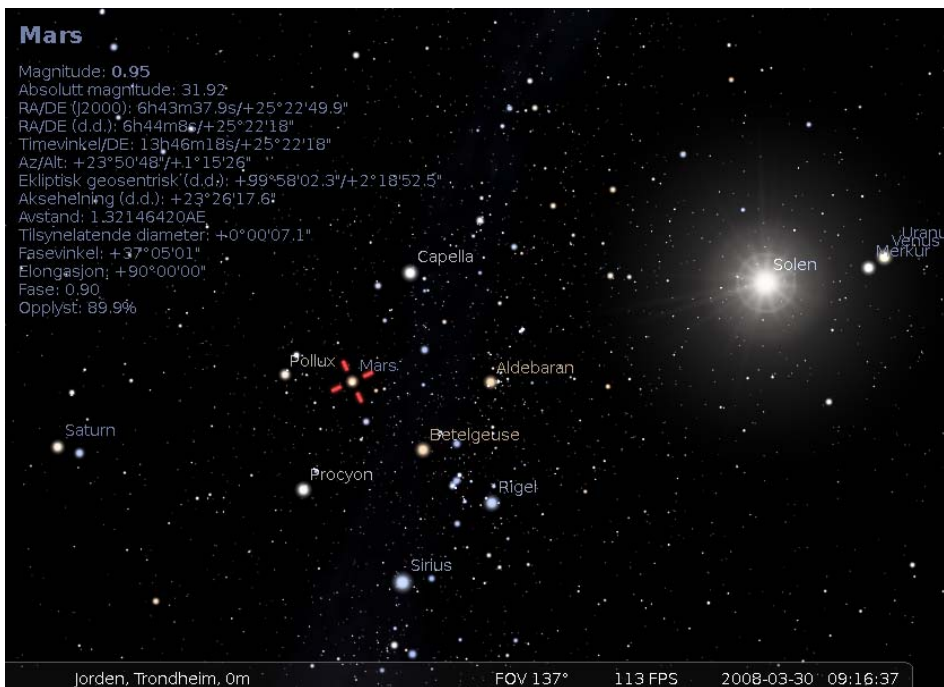
$$\frac{R_J}{R_p} = \sin \theta$$

Problemet är att vi inte kan mäta denna vinkel utan att befinna oss på planeten. Detta är dock inte omöjligt då man i ett planetarie program kan ställa sig var som helst i solsystemet, något vi behandlar lite senare. Men det vi försöker göra påminner mycket om Aristarchos metod att bestämma avståndet till solen med hjälp av halvmånen. Här hade vi problem att bestämma den lokala halvmånen, vilket vi löste genom att använda oss av månens fasvinkel. I detta fall så kommer fasvinkeln vara samma vinkel som  $\theta$ . Det vill säga när vinkeln mellan solen och en yttre planet är  $90^\circ$  så behöver vi ”bara” bestämma fasvinkeln och kan med denna bestämma den yttre planetens banradie som funktion av jordens banradie:

$$R_p = \frac{R_J}{\sin \theta}$$

Det enda sätt vi kan bestämma fasvinkeln är genom att använda ett planetarieprogram. I Stellarium utnyttjar man den information som visas när ett objekt markeras. I den information som visas (figur 26) finns förutom fasvinkeln även elongationen, det vill säga vinkelavståndet till solen. När elongationen är  $90^\circ$  så är villkoret för kvadraturen uppfyllt och det enda vi behöver är att läsa av fasvinkeln.



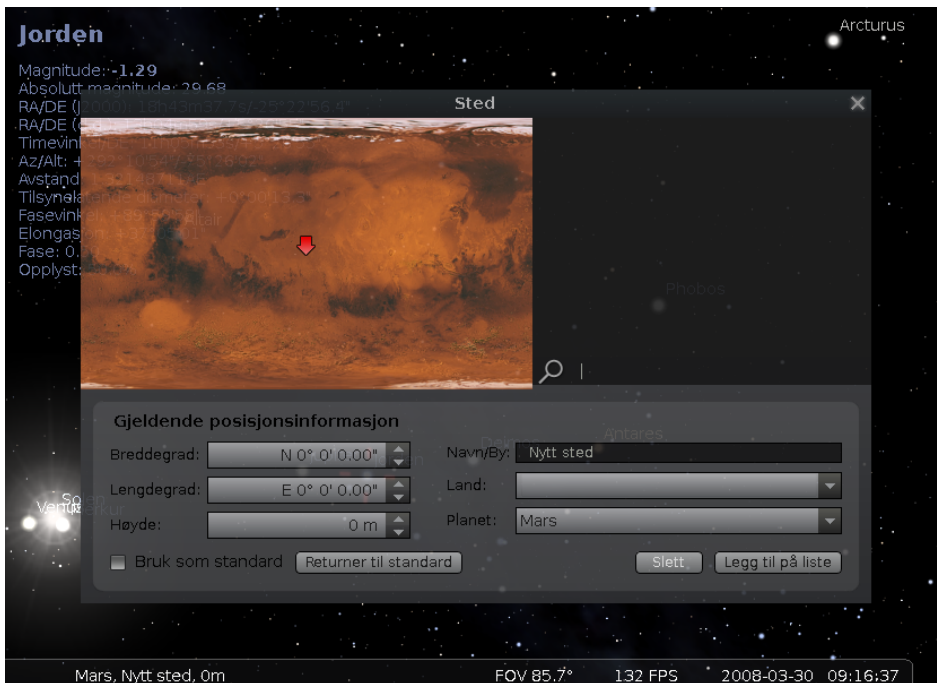


**Figur 26** Skärmbild från Stellarium med Mars i kvadraturen

Vid den visade kvadraturen (30 mars 2008) är fasevinkeln  $37^{\circ}05'01''=37,08^{\circ}$  vilket ger att Mars banradie är 1,66 gånger jordens banradie. Vilket stämmer bra med tabellerade värden på mellan 1,666 (Aphelion) och 1,381 (Perihelion). Då Mars bana är eccentric kommer vi få olika värden beroende på vilken kvadratur som används. Genom att göra om detta för flera kvadraturer kommer det vara möjligt att bestämma banans eccentricitet. Man kan göra om detta för Jupiter och Saturnus, men här kommer de större avstånden göra att fasevinklarna blir mindre och mer känsliga för fel.

### Resa i solsystemet – Jordens elongation från de yttre planeterna

Istället för att observera de yttre planeternas rörelse kan vi resa till dom och använda samma teknik som vi använde när vi bestämde de inre planeternas banradier. Vi skall alltså bestämma den maximala elongationen för jorden. Observera att detta inträffar vid samma tidpunkt då vi har kvadraturen. För att förflytta oss till en annan planet väljer man en annan planet när man väljer positionen. Detta görs vanligen i en meny i programmet (Figur 27).



**Figur 27** Positionsval i Stellarium

Vi går in och markerar jorden och läser av elongationen. I detta fall är elongationen  $37^{\circ}05'01''=37,08^{\circ}$  vilket i kombination med

$$\sin \theta_{\max} = \frac{R_J}{R_p} \rightarrow R_p = \frac{R_J}{\sin \theta_{\max}}$$

ger att Mars banradie är 1,66 gånger jorden banradie. Samma resultat som när vi använde kvadraturen och fasvinkeln ovan. Detta är inte konstigt då dessa metoder är de samma. Skillnaden är att här förflyttar vi oss till en annan himlakropp.



**Figur 28** Skjærmbild från Stellarium. Jorden observerad från Mars.



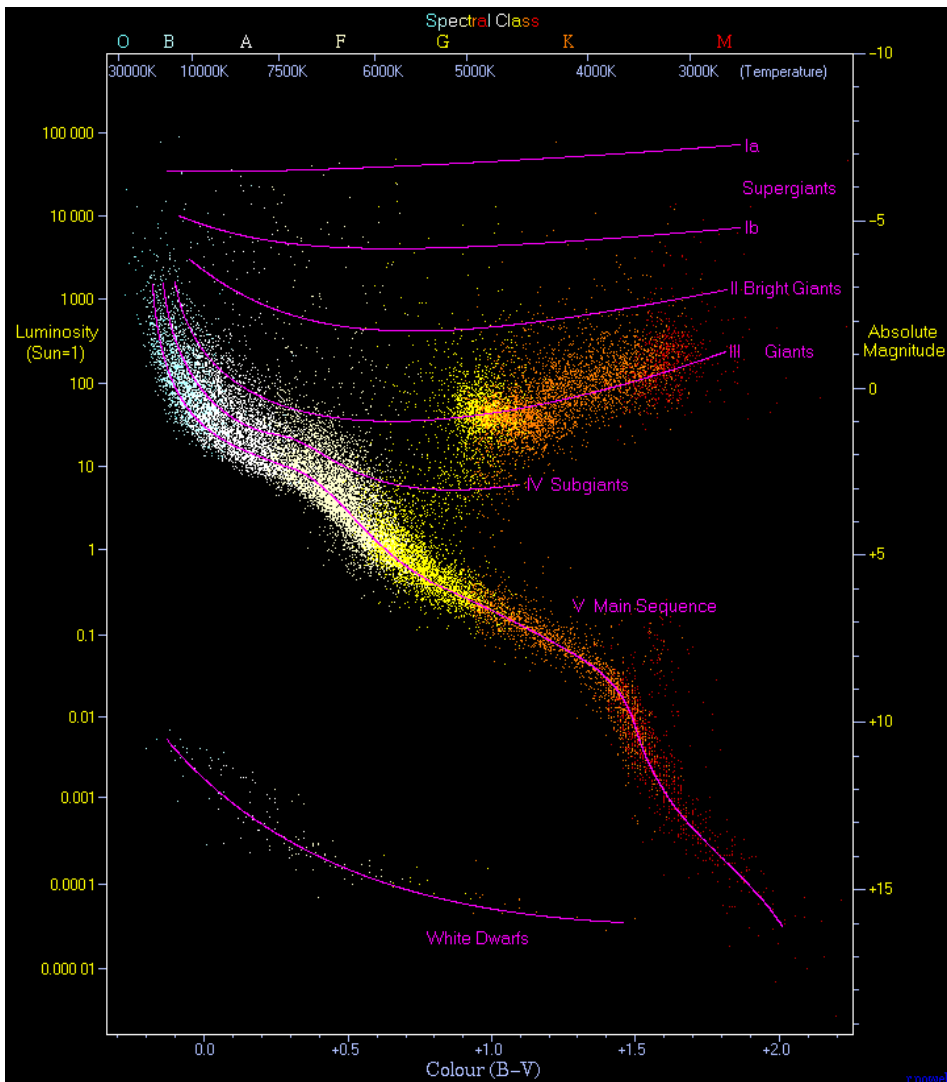
## Hertzsprung-Russel Diagram

Hertzsprung-Russel diagram har hjälpt oss att förstå hur stjärnornas utveckling och ses av många som en av de viktigaste oppdagelserna inom astrofysiken. HR-diagram ingår som en viktig del i olika fysik och astronomi utbildningar. Men det är inte bara i undervisningen som HR-diagram är nyttiga. För amatörastronomen är HR-diagrammet en utmärkt sätt att lära sig mer om stjärnhimlen och stjärnornas utveckling. Ett HR-diagram är en plot av observerade storheter, som man i princip kan göra själv. Dock behöver man inte detta då data finns tabellerade bland annat i Hipparcos katalogen. Detta betyder även att informationen finns i många planetarie-program, såsom Stellarium, Celestia och Starry Night. Det vill säga att man kan genomföra ”observationerna” vid sin egen dator. Här presenteras ett förslag till hur man kan använda sig av planetarieprogram och själv konstruera och använda HR-diagram praktiskt. Man får genom detta en ökad förståelse för hur ett HR-diagram konstrueras och vad man kan lära sig from dom. Övningarna som presenteras här är främst lämpliga i gymnasiekursen i fysik eller för amatörastronomer som vill lära sig mer när vädret inte är lämpligt för observationer.

### Introduktion

HR-diagram används för att studera stjärnor och deras utveckling. Ett HR-diagram är en plot av olika stjärnor med avseende på ljusstyrka mot spektral klass eller yttemperatur. Här finns det nu ett antal möjligheter vad man väljer för storheter på axlarna. Detta beroende på i vilket sammanhang man använder HR-diagrammen. Det vanligaste är att man har spektralklass på x-axeln, medan man använder absolut magnitud eller luminositet på y-axeln. Oftast ser man även yttemperaturen angiven samtidigt som spektralklassen. Detta ställer till ett problem med att skalan på x-axeln inte blir linjär. Ett alternativ som ofta används av astrofysiker är att använda sig av den observationella storheten B-V färgindex, vilket man får fram genom att jämföra ljusstyrkan när man använder sig av olika färgfilter. Färgindex är därigenom relaterat till yttemperaturen och ger en bättre linjär skala. Om man vill använda absolut magnitud eller luminositet på y-axeln spelar egentligen ingen roll då de är relaterade till varandra. Med tanke på att båda dessa begrepp är abstrakta kan det i skolan vara värt att använda utstrålad effekt istället, men med tanke på att man måste räkna om så är det bättre att förklara vad luminositet och absolut magnitud innebär. Man bör också vara klar över hur vi bestämmer dessa storheter. Det vi kan mäta är den skenbara

magnituden hos en stjärna, det vill säga den ljusstarka vi ser, men detta beror på avståndet till stjärnan. Så för att från den skenbara magnituden bestämma den absoluta magnituden behöver vi veta avståndet. Detta kan vi göra genom att bestämma den årliga parallaxen hos stjärnan. Även om stjärnorna befinner sig långt bort så kan vi detektera en liten skillnad (storleksordningen milli-bågsekunder) mellan dess position exempelvis den 1 januari och 1 juli. Detta gör att vi vet avstånden till de stjärnor som är ”närmast” oss. Men avstånden gör också att ljussvaga stjärnor måste befinna sig nära oss för att vi skall kunna se dem. Detta kommer få en effekt i egenkonstruerade HR-diagram.



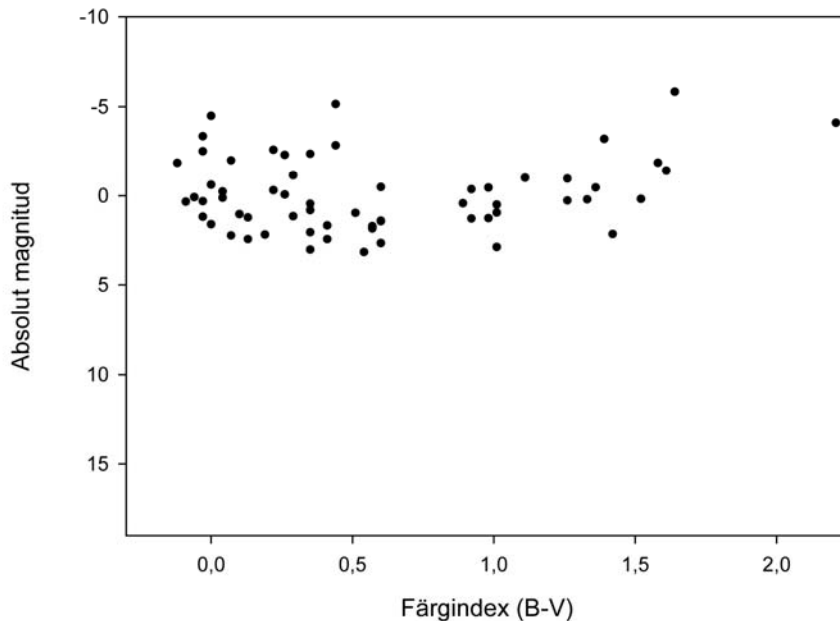
Figur 29 HR-diagram. *Richard Powell Wikimedia Commons/Creative Attribution-Share Alike 2.5 Generic* <http://en.wikipedia.org/wiki/File:HRDiagram.png>

## Konstruktion av eget HR-diagram

Genom att ta ett slumpvis urval av stjärnor kommer man med ett tillstreckligt stort antal att erhålla ett eget HR-diagram. Det man bör observera är att man för att få ett riktigt bra diagram behöver minst 5000 stjärnor. Men även en begränsad mängd stjärnor kan ge mycket information. Det är dessutom viktigt att även ta med svaga stjärnor. Detta gör att man bör se till att man även har med så ljussvaga stjärnor som möjligt. För att välja ut stjärnor mer slumpmässigt så bör man ha på det ekvatoriala rutnätet och välja ut ett område där man studerar alla stjärnor man kan hitta. I Stellarium markerar man varje stjärna och får då upp information om stjärnan, bland annat nummer i Hipparcos katalogen, Absolut lysstyrka och färgindex (B-V). Dessa kan man nu anteckna i exempelvis Excel. Observera att Hipparcos katalogen innehåller mätningar på stjärnor ner till (skenbar) magnitud 9,5-10, men att det inte finns en absolut magnitud för alla stjärnor i katalogen, då avstånden inte har bestämts.

När man anser att ha ett tillräckligt stort antal är det lätt att skapa ett eget HR-diagram. Observera att magnitudskalan är omvänd så man skall ha de negativa värdena överst. Här är det också bra att välja skalorna så den blir samma som på figur 29.

Som exempel visas i figur 30 alla stjärnorna (ca 60 st) där den absoluta magnituden bestämts mellan RA6h00min - 6h30min och DEC 20 - 25°.



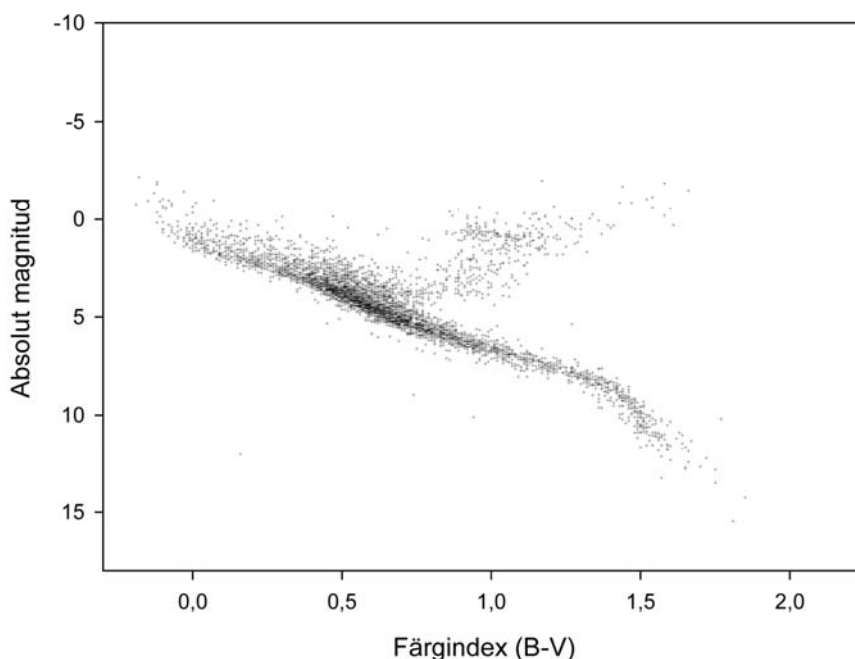
**Figur 30 HR-diagram konstruerat från stjärnor mellan RA6h00min - 6h30min och DEC 20 - 25°**

Det är tydligt att man bara får med en begränsad del av huvudserien och jättar. Detta är dock helt naturligt då stjärnorna längre ner på huvuddserien och de vita dvärgarna är för ljussvaga för att ses, och saknas därför. Detta visar tydligt att man måste vara noga med att få med svaga stjärnor, speciellt de närmaste, för att erhålla ett bra HR-diagram. Detta är en viktig lektion, att man måste ha ett stort urval stjärnor och där ca 100 inte är tillräckligt. Här kan man även gå till Hipparcos katalogen och lasta ner delar av den. Dock är detta inte det lättaste utan jag har gjort i ordning en lista (i Excel-format) på ca 5000 stjärnor som kan användas.

[<http://www.nt.ntnu.no/users/jonaspe/Stellarium/HR-Data.xls>]

Det är också värt att notera att det finns en funktion i Starry Night där man kan se ett HR-diagram för den del av himlen som man visar i fönstret. Detta sker automatiskt och man missar därigenom en del av upplevelsen att själv skapa ett HR-diagram.





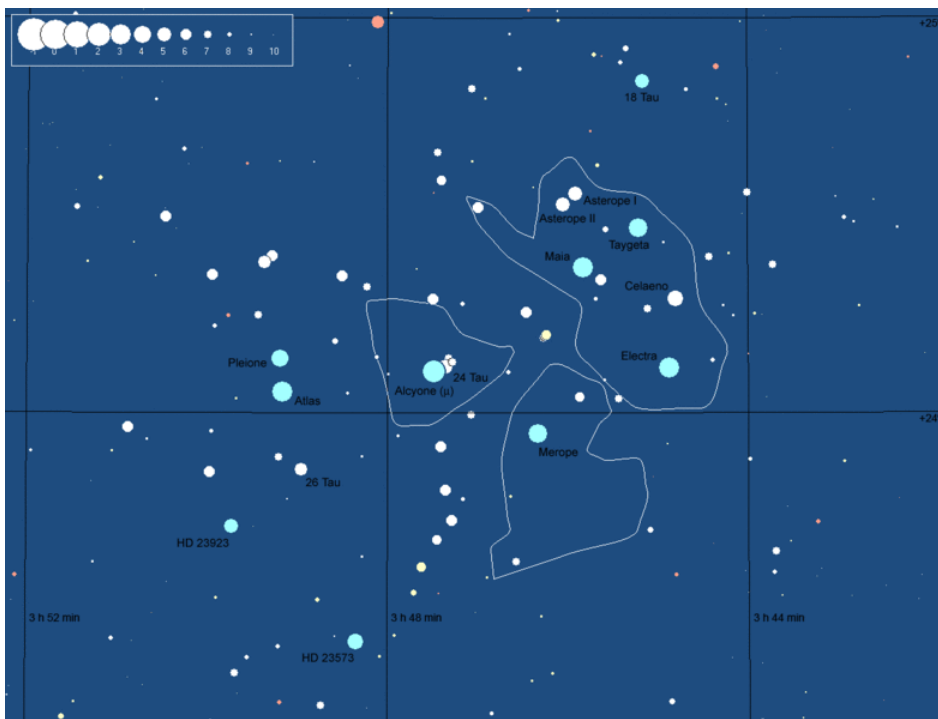
**Figur 31 HR-diagram konstruerat från lista.**

### **Användning av HR-diagram för att åldersbestämma en stjärnhop**

Denna övningen visar en del av den information som man kan få ut av ett HR-diagram. Då vi vet hur stjärnorna utvecklas kan vi konstruera ett HR-diagram för en stjärnhop och utifrån den informationen man får kunna åldersbestämma stjärnhopen. Vi vet att ju högre upp i huvudserien en stjärna befinner sig desto kortare livstid har den. Hittar vi inga stjärnor högt upp i en stjärnhop vet vi att ett visst antal år har gått och dessa stjärnor har lämnat huvudserien. Alternativt om vi bara hittar stjärnor i en viss del av huvudserien vet vi att dom inte har levt så länge att dom har lämnat huvudserien och kan från detta bestämma åldern. För en animation om detta se: [http://bcs.whfreeman.com/universe9e/default.asp#571828\\_574161](http://bcs.whfreeman.com/universe9e/default.asp#571828_574161) eller en lämplig astronomibok.

Här väljer vi att studera två stjärnhopar som dels är lätta att se och som har olika ålder: Pleiaderna (en öppen stjärnhop i Oxens stjärnbild) och Hyaderna (även den en stjärnhop i Oxens stjärnbild). Dessa stjärnhopar består av över 200 stjärnor vardera, men man behöver bara ta ett relativt litet urval, 10-30 stycken i vardera stjärnhopen. Här måste man dock vara noga med att

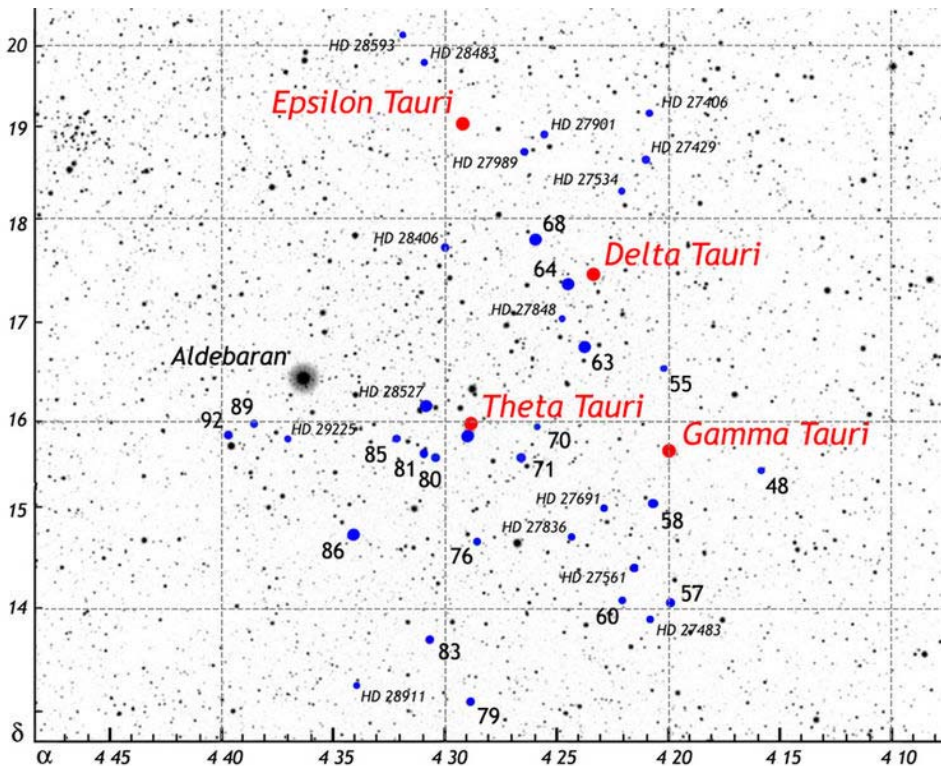
stjärnorna man väljer verkligen hör till stjärnhopen, något man gör lättast genom att se att avstånden ligger inom ett begränsat område. När det gäller Pleiaderna kan man med fördel titta på Wikipedia för att se vilka stjärnor som ingår. Här kan man också notera att dessa stjärnhopar är av intresse ur ett historiskt perspektiv då det var dessa som studerades av Ejnar Hertzsprung när han ställde upp de första HR-diagrammen.



**Figur 32** Pleiaderna, namngivna tillhör stjärnhopen, andra bör kontrolleras. *Ville Koistinen: Wikimedia Commons/Creative Attribution-Share Alike 3.0 Unported*

Pleiaderna kännetecknas av att alla stjärnorna är heta och ljusstarka (spektral klass O, B & A) vilket placerar dem i den övre delen av huvudserien, något som indikerar att de har bildats för max 100 miljoner år sedan. Detta sätter då en övre gräns för hur gammal stjärnhopen är.

Hyaderna är lite svårare att identifiera då den stjärnhopen är större. Aldebaran som ligger i närheten hör inte till stjärnhopen. Använd figurer och gärna listor över stjärnorna i hyaderna [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_stars\\_of\\_Hyades](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_stars_of_Hyades) för att vara säkra på att rätt stjärnor väljs.



Figur 33 Stjärnor i Hyaderna (markerade med blått och de starkaste i rött). *Thuvan Dihn Wikimedia Commons/Creative Attribution-Share Alike 3.0 Unported*

I Hyaderna hittar man inga stjärnor av spektral klass O och B, vilket visar att stjärnhopen är äldre än Pleiaderna, runt 625 miljoner år. Vi hittar också stjärnor med senare spektralklasser något som inte fanns i Pleiaderna.

Övningarna som presenterats här är ett försök att visa att HR-diagram kan ge mer information än vad man tror och att man själv kan konstruera dom och använda dom för att bestämma åldern på stjärnhopar. Detta ger mer förståelse för användningen av HR-diagram och varför de har ökat vår förståelse för stjärnornas utveckling. Utvecklingen inom astrometrin går framåt hela tiden och mer data kommer att implementeras i planetarieprogrammen med tiden vilket ger nya möjligheter. Man kan givetvis studera andra stjärnhopar och själv försöka bestämma deras ålder. Här är det dock värt att notera att man egentligen inte behöver den absoluta magnituden då man kan använda HR-diagrammet som kalibrering och bara titta på den uppfattade magnituden.

Jag har använt dessa övningar på en lärarfortbildningskurs vid NTNU. Då HR-diagram intar en centralroll i kursplanerna i den norska gymnasieskolan ansåg jag det viktigt att lärarna fått en fördjupad förståelse angående HR-diagram. Här gjorde jag även en koppling till observationsuppgifter där kursdeltagarna själva skulle ut och observera olika objekt på himlen, där då Pleiaderna ingick som ett objekt som skulle ”kryssas”. Att teorin på detta sätt blandades med observationer och laborativa moment fick ett gott gensvar hos deltagarna som i efterhand själva blivit mer observanta på himlen och har uttryckt önskemål om att själva prova detta med sina elever.

## Tracker

Videoanalysprogrammet Tracker som man kan använda för att bland annat analysera olika försök i mekanik, kan även användas i astronomiska sammanhang. Jag går inte igenom hur man använder programmet här utan hänvisar till ett häfte som beskriver programmet från grunden:

<http://www.ntnu.no/skolelab/publikasjoner>

[http://www.ntnu.no/documents/2004699/11799071/SL\\_Videoanalys\\_røde+serie.pdf](http://www.ntnu.no/documents/2004699/11799071/SL_Videoanalys_røde+serie.pdf)

Här beskriver jag två möjliga projekt med astronomi anknytning som kan användas.

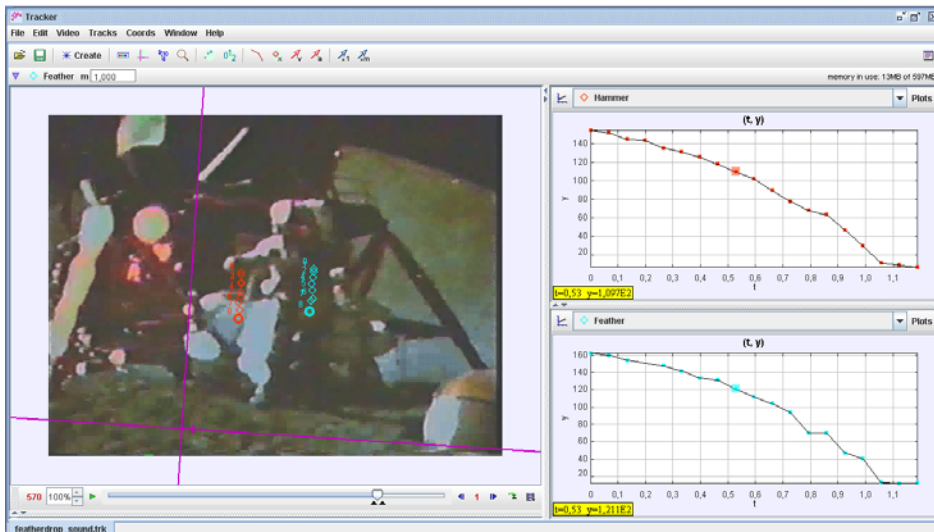


## Gravitasjonskonstanten på månen

Å bestemme akselerasjonen for objekter i fritt fall er ett standard eksperiment i fysikk, som alle elever på et eller annet tidspunkt utfører. Det finnes mange metoder for å gjøre dette, mer eller mindre vellykkede i klasserommet.

Utviklingen av videoanalyseverktøy har gitt oss enda en metode. Bruk av en video gjør det mulig å studere mer komplekse og eksotiske situasjoner, eller hverdagssituasjoner der elevene selv har gjort et opptak med for eksempel et mobiltelefonkamera. Hvis en video er tilgjengelig og målestokken er kjent, så er det mulig å analysere bevegelsen.

En av de mest spektakulære demonstrasjonene av objekter i fritt fall ble utført på månen av kommandør for Apollo 15-romferden David Scott. Han holdt en hammer og en fjær ut fra kroppen, slapp dem samtidig, og fordi de ble sluppet i et vakuum falt de med samme hastighet slik Galileo Galilei konkluderte 400 år tidligere. Videoen, som er tilgjengelig på NASAs hjemmeside [1], gjør det mulig å bestemme akselerasjonen grunnet gravitasjonen på månen ved hjelp av videoanalyse.



Figur 34 Videovinduet og plotter av y-posisjonen til hammeren og fjæra i Tracker. Den korrekte y-aksen er vist i videovinduet

Uheldigvis er kvaliteten på videoen ganske dårlig. Det er vanskelig å skille hammeren og fjæren fra bakgrunnen, det finnes ingen kalibrert målestokk, og kameraet er plassert litt skjevt. Både hammeren og fjæra er uskarpe, men det er mulig å observere dem i fritt fall i mer enn 10 bilder på videoen, spesielt i første del av fallet. Det er derfor mulig å skaffe nok informasjon til å uttrykke posisjonen som en funksjon av tiden. Hvor skjevt kameraet er plassert kan bestemmes ved å bruke posisjonen til hammeren rett etter at den er blitt sluppet og posisjonen hvor den lander. Disse punktene gjør det mulig å bestemme den sanne y-aksen, som er omtrent 4 grader fra y-aksen til kameraet. Målestokken er mer usikker, men informasjon tilgjengelig fra nettstedet sier at fallet var omtrent 1,6 m. Dette stemmer overens med den antatte høyden til astronauten, omtrent 2,0 m med hjelm, men er allikevel en kilde til usikkerhet.

Ved hjelp av videoanalyseprogrammet Tracker, ble posisjonene til både hammeren og fjæra av merket og registrert. Den nøyaktige posisjonen i hvert bilde kan være vanskelig å finne, og resultatet vil derfor variere noe. For å unngå bias, bør plottvinduet ikke være synlig når posisjonene blir markert. Det er nyttig å bla fram og tilbake mellom bildene for å skille hammeren og fjæra fra bakgrunnen. Fra posisjonsdataene får man fram en tilpasset kurve, med en andregradslikning som beskriver fallbevegelsen. Ved å identifisere akselerasjonen i likningen kan den bestemmes.

Bevegelsen for en gjenstand i fritt fall kan beskrives av

$$\text{bevegelseslikningen: } y = y_0 + v_y t + \frac{1}{2} a t^2$$

Der  $y_0$  er høyden objektet slippes fra,  $v_y$  farten den har i startøyeblikket og  $a$  er akselerasjonen.

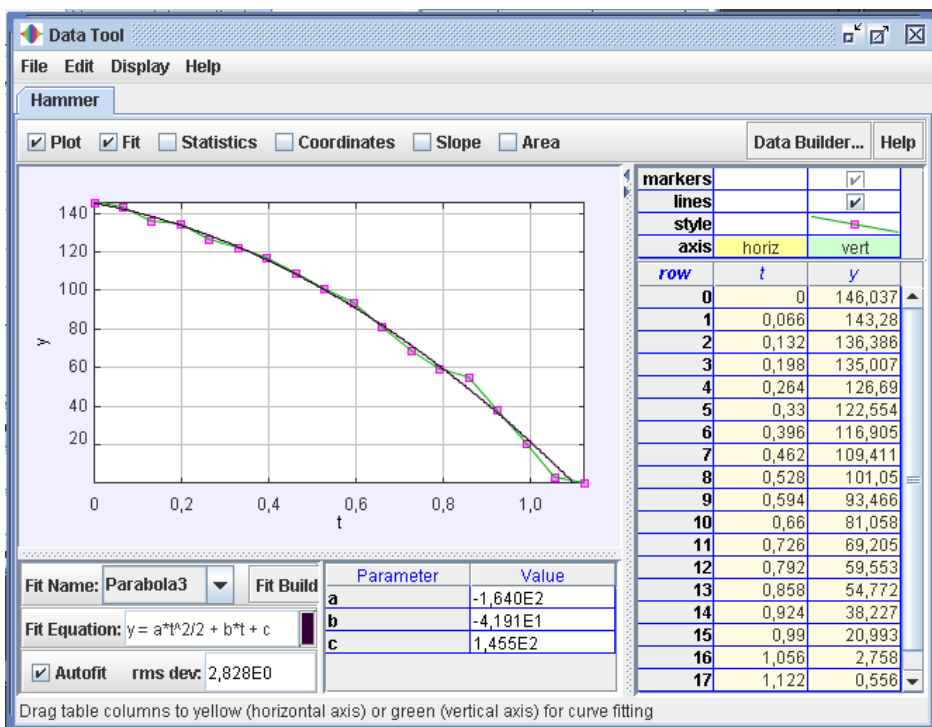
Etttersom vi ikke starter tiden på eksakt null får vi en startfart.

Etter å ha markert fallbevegelsen til hammeren fikk vi denne bevegelseslikningen: (figur 35).

$$y = 1,455 - 0,42 \cdot t - 1,64 \frac{t^2}{2}$$

Med andre ord en akselerasjon på  $1,6 \text{ m/s}^2$  nedåt.





**Figur 35** Anpassning av bevegelsekurva till en ekvation som ger akselerasjonen

Vi fikk akselerasjonen  $1,6 (\pm 0,3) \text{ m/s}^2$  for fjæra og  $1,6 (\pm 0,4) \text{ m/s}^2$  for hammeren ved å gjenta avmerkingen av bevegelsen flere ganger. Disse verdiene stemmer godt overens med den beregnede verdien  $1,6 \text{ m/s}^2$  og er tydelig forskjellig fra verdien på jorden. Grunnet vanskelighetene med å markere korrekte posisjoner kan det forventes verdier mellom  $1,3\text{--}2,2 \text{ m/s}^2$  for elever og andra som vill gjenta forsøket. Disse resultatene burde overbevise dem om at gravitasjonen er mindre på månen og at den stemmer overens med deres egne beregninger med Newtons gravitasjonslov. Resultatet er en sterk indikasjon på at månelandingen virkelig fant sted. Det er mulig å simulere lavere gravitasjon ved å redusere bildehastigheten på videoen. Ved å spille av Apollo 15-videoen raskere, vil de fallende objektene få samme akselerasjon som på jorda, men bevegelsene til astronautene vil bli unaturlige for en person i en romdrakt.

Bruk av videoanalyse er et billig alternativ for visse kinematikk eksperimenter, og alt som trengs er et standard webkamera for å registrere eksperimentet. Fordi mange videoer, som Apollo 15-videoen, er

tilgjengelig på nettet, har man dessuten mulighet til å studere en rekke eksotiske situasjoner.

[1] [http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/apollo\\_15\\_feather\\_drop.html](http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/apollo_15_feather_drop.html)

Detta avsnitt skrevs av J.E. Hagen<sup>1</sup> og J Persson

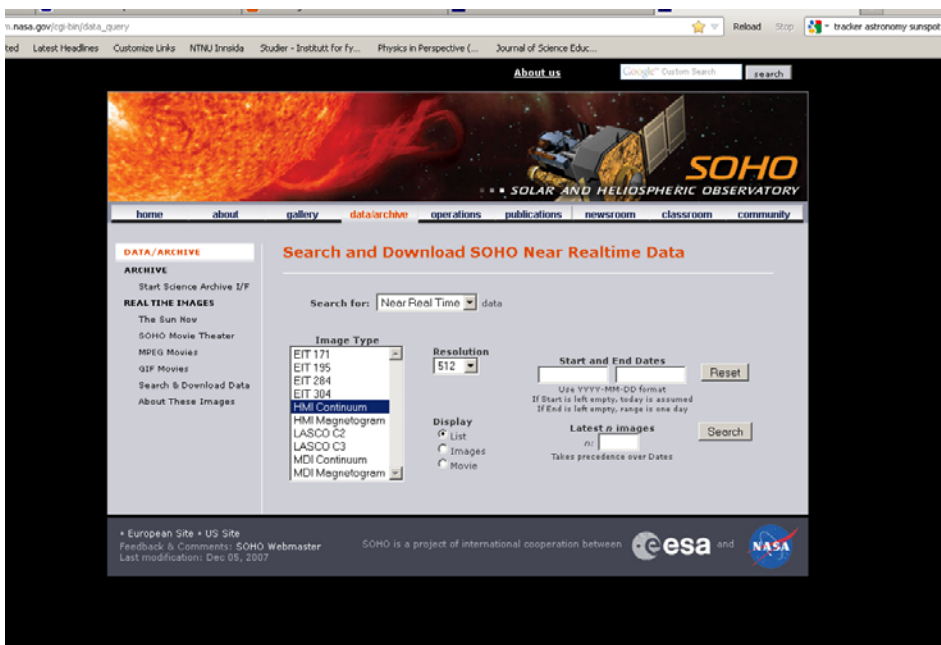
<sup>1</sup> Vardø videregående skole Kaigata 6, N-9950 VARDØ

## Solfläckar

Solfläckar har troligen observerats under flera tusen år, men den första dokumenterade observationen gjordes 364 f.Kr, detta baserat på en kommentar av den kinesiske astronomen Gan De. Den första observationen med ett teleskop, står det i många böcker, gjordes av Galileo Galilei. Men Thomas Harriot gjorde sina första observationen den 8 december 1610, enligt hans dagbok. Den första publicerade, juni 1611, observationen gjordes av Johannes Fabricius som även observerade solfläckarnas rörelse över solskivan. Galilei observation och hans bittra disput med Christopher Scheiner skedde efter detta, när båda var ovetande om Fabricius verk. Scheiner noterade att solfläckarnas rotation varierade med latituden och kan därför anses som den förste som upptäckte solens differentiella rotation. [1].

Vi kan idag utan större problem observera solfläckar, antingen med egna teleskop eller via bilder på webben. Men det är faktiskt möjligt att få mer information än så. Genom att studera solfläckar så kan man visa att solen roterar och att rotationen är differentiell, dvs att den roterar olika fort beroende på vilken latitud man tittar på, som Scheiner observerade på 1600-talet.

Det finns ett antal observatorier och satelliter dedicerade till att studera solen och den lämpligaste att hämta bilder för analys från är SOHO satelliten, som ligger i Lagrangepunkten L1, mellan jorden och solen. Bilderna från SOHO finns i ett öppet arkiv och kan lastas ner fritt. Bilderna som kan användas för här finns på [http://sohodata.nascom.nasa.gov/cgi-bin/data\\_query](http://sohodata.nascom.nasa.gov/cgi-bin/data_query).



Figur 36 Nedlastningssidan för SOHO

Gå till Search & Download Data: där du markerar HMI Continuum eller MDI Continuum och det antal bilder eller tidsperiod du vill titta på. Observera att HMI Continuum inte finns för alla tidpunkter. Välj Images eller List, resultatet visas då som bilder eller en lista, där det är möjligt att lasta ner samtliga i ett zip-arkiv.

Dessa bilder kan man sedan lasta in i Tracker [2,3]. Detta kan göras på två sätt. Du kan göra det sekvensiellt, men för att göra detta måste bilderna tillhöra samma sekvens, dvs ha samma namn med en siffra i slutet, bild1, bild2, osv. Alla filerna måste då döpas om.

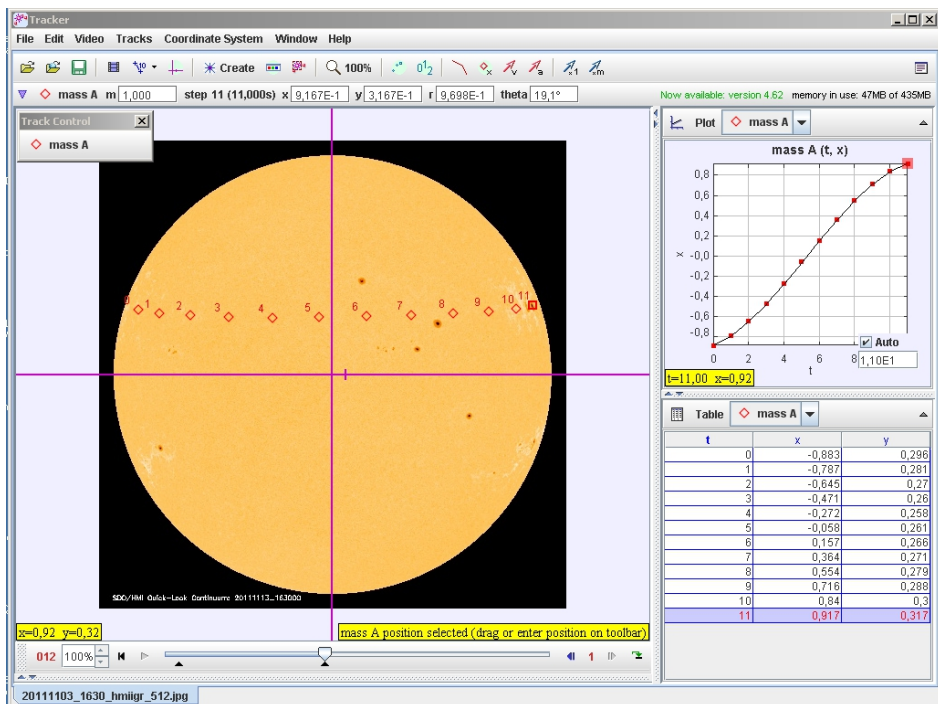
Du kan även importera bild för bild i Tracker, eller importera via drag-and-drop. Här måste man då vara observant på att vissa bilder inte importeras utan måste läggas till i efterhand genom import image.

Data från SOHO sparas ett antal gånger per dygn där HMI Continuum data tas 16 gånger per dygn, det vill säga varje 1,5 timme. Nu behöver man egentligen inte 16 bilder per dygn utan man kan klara sig med betydligt färre. Om man väljer att spara 16 bilder per dygn rör det sig om runt 480 bilder på en månad, något som Tracker inte kan hantera. Det är då bättre att lasta in en bild per dygn. Har du lastat ner bilder till ett bibliotek kan du enklast välja ut de bilder du vill ha genom att använda ”sök” funktionen på datorn och då söka på en speciell tidpunkt (\_01630\_) och då få en lista med bilder tagna vid

samma tidpunkt, dessa kan då markeras och importeras till Tracker via drag-and-drop eller import image.

Jag har skapat några filmer som ligger i ett videobibliotek [4], som är öppet för nedlastning. Dessa filmer består av en bild per dygn och omfattar 1 – 2 månader.

När man läst in bilderna i Tracker skall man genomgå den vanliga proceduren med längdskalan, koordinatsystem och tidsskalan. Koordinatsystemet väljs så att origo hamnar i centrum av solen. Längdskalan väljs så att solens radie får längden 1. dvs solens diameter skall vara 2. Tidsskalan beror på antalet bilder per dygn. Har du en bild per dygn väljer du skalan 1 sekund (=1 sekund mellan varje bild) men kom ihåg att en sekund då är ett dygn. Om du har 16 bilder per dygn sätter du tidsskalan till 1/16. I Tracker markerar du nu den/om solfläckar du vill studera på vanligt sätt. Du får nu x- och y- koordinaterna i tabeller och/eller grafer.



Figur 37 Tracker med en solfläck markerad

För att bestämma latituden på solfläcken använder du dig av y-koordinaten :

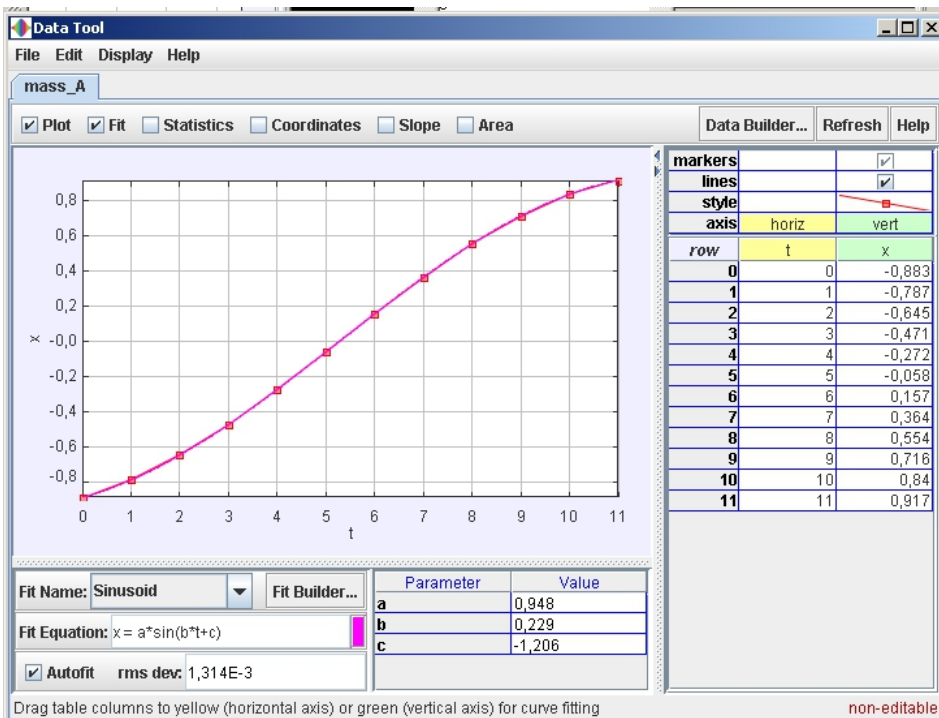
$$\sin \varphi = \frac{Y}{R}$$

Här kan du nu studera om latituden ändras eller om den håller sig konstant. För att få latituden i tabellen kan man använda Databuilder.

x-koordinaten kommer att variera med tiden och det skall vi använda för att bestämma rotationen. Studerar man grafen av x positionen så ser du en sinusliknande funktion. Gå till Analyze och använd "sinusoidal" anpassning. x positionen kommer då att anpassas till ekvationen:  $x = a \sin(b \cdot t + c)$  där

parametern b motsvarar vinkelfrekvensen,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Här kan det bli problem med anpassningen, vilket gör att jag rekommenderar att man själv lägger in startvärden på  $a$  och  $b$  som 1 respektive 0,25 och sedan klickar på refresh eller markerar autofit. Observera att parametern  $a$  skall ha ett värde på ca 1, stora värden visar att anpassningen har hittat fel minima. Man kan även variera värdena för att själv hitta en bättre anpassning.



Figur 38 Anpassning till solfläckens position med en sinus-funktion

Genom att ta parametern  $b$  kan du då bestämma rotationstiden, observera att perioden ges i dagar.

Genom att studera solfläckar på olika latituder kan man se att solen har en differentierad rotation. Jag har valt att studera 6 solfläckar under januari 2012 och fått fram rotationstiderna presenterade i tabell 39.

Solfläck	Latitud ( $\pm 2^\circ$ )	rotationstid (dagar)
1	$9^\circ$	27,3(6)
2	$11^\circ$	26,6(6)
3	$15^\circ$	26,9(6)
4	$16^\circ$	27,7(7)
5	$22^\circ$	27,4(6)
6	$27^\circ$	29,1(6)

**Tabell 39. Sex solfläckar under Januari 2012.**

Här måste man dock observera att solens rotation anges på olika sätt. Det normala är att rotationen ges som den siderala perioden vid ekvatorn (24,47 dagar), men i astrofysikböcker används vanligen Carrington perioden som är den synodiska perioden för en latitud på  $26^\circ$  (27,2753 dagar). Den siderala perioden är den i förhållande till fixstjärnorna medan den synodiska är den som observeras från jorden. Skillanden mellan dessa beror på jordens rörelse i sin bana runt solen. För förhållandet mellan den synodiska (S) och den siderala (P) perioden är:

$$1/S = 1/P - 1/P_{\oplus}$$

där  $P_{\oplus}$  är den sidereal perioden för jorden runt solen (365,256308 days).

Den differentierade medel- rotationen för solen för olika latituder ges av en empirisk formel:

$$\omega(\phi) = 14,71 - 2,39 \sin^2 \phi - 1,78 \sin^4 \phi \text{ deg dag}^{-1}$$

där  $\phi$  är latituden på solen [5]. Denna kan man använda för att jämföra med de resultat man själv får. Här måste man vara observant på att detta är medelvärden som kommer att skillja sig från det man observerar. Men även andra faktorer spelar in, solfläckarna kan ändra form och det blir svårt att markera rätt position. Men i tillägg så kan solfläckar uppvisa en differentiell rotation som beror på hur gamla solfläckarna är [6].

En enkel övning som denna kan användas i skolan för att visa på att solen är mer komplex än vad man tror och att det är möjligt att själv göra intressanta upptäckter. För en amatörastronom är detta ytterligare något för molniga nätter, då solen kan bli en källa för nya observationer.

1. Scheiner Christoffer (1630) "Rosa Ursine sive solis", book 4, part 2,
2. Tracker är ett videoanalys program som är Open Source, information och instruktionsvideor finns på [www.nt.ntnu.no/users/jonaspe/tracker/Tracker.htm](http://www.nt.ntnu.no/users/jonaspe/tracker/Tracker.htm)
3. Tracker finns att lasta ner från [www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/](http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/)
4. Videos kan hämtas från [www.nt.ntnu.no/users/jonaspe/tracker/sunspots.htm](http://www.nt.ntnu.no/users/jonaspe/tracker/sunspots.htm)
5. Snodgrass, H.; Ulrich, R. (1990). "Rotation of Doppler features in the solar photosphere". *Astrophysical Journal* **351**: 309–316.
6. Beck, J. (2000). "A comparison of differential rotation measurements". *Solar Physics* **191**: 47–70.











*Häftet beskriver ett antal experimentella uppgifter som man kan genomföra i astronomi. Grundtanken är att kunna använda sig av enkla medel och exempelvis bestämma avståndet från jorden till månen eller solen. En beskrivning ges hur man med ett enkelt solur kan bestämma ett antal olika parametrar med god noggrannhet. Dessa parametrar är: Längden på ett år, Jordaxelns lutning, Latituden för observationsorten, Datum för vårdagjämningen, Jordbanans excentritet och När jorden är som närmast solen (perihelion).*

*Uppgifterna är inriktade mot Naturfag i alla trinn, men har kopplingar till andra fag.*

Førsteamanuensis Jonas Persson

Institutt for Fysikk, NTNU

Skolelaboratoriet har som oppgave å drive forsknings- og utviklingsarbeid rettet mot undervisning i realfag og teknologi i skolen. Gjennom SLserien vil PLU og Skolelaboratoriet publisere resultatene av dette arbeidet.

ISBN 978-82-7923-063-2  
ISSN 1503-9242



## Program for lærerutdanning

**Skolelaboriet**  
for matematikk, naturfag og  
teknologi

Tlf: 73 55 11 43  
Fax: 73 55 11 40  
<http://www.skolelab.ntnu.no>